

**Zur Rechtfertigungsproblematik
des unterrichtsbegleitenden Rechnereinsatzes im Bruchrechnenunterricht**

**Eine empirische Fallstudie unter Betonung methodologischer
Aspekte zur Auswertung von Videostudien**

Dissertation
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Dem Fachbereich Mathematik und Informatik (FB6) der
Universität Essen
vorgelegt im September 2001
von
Andreas Pallack
aus Velbert

Datum der mündlichen Prüfung: 18.12.2001

Gutachter: Prof. Dr. G. Herden, Universität Essen
Prof. Dr. D. Lind, Universität Wuppertal

Für die engagierte Betreuung dieser Arbeit und die zahlreichen fruchtbaren Gespräche möchte ich Herrn Herden meinen herzlichen Dank aussprechen. Besonderer Dank gilt meiner Frau Gabriele, ohne deren Geduld und Verständnis das Entstehen dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Andreas Pallack

Essen, im September 2001

Andreas Pallack

Zur Rechtfertigungsproblematik des unterrichtsbegleitenden Rechnereinsatzes im Bruchrechnenunterricht

Eine empirische Fallstudie unter Betonung
methodologischer Aspekte zur Auswertung
von Videostudien

„Erstes und letztes Ziel unserer Didaktik soll es sein,
die Unterrichtsweise aufzuspüren und zu erkunden, bei
welcher die Lehrer weniger zu lehren brauchen, die
Schüler aber dennoch mehr lernen; in den Schulen
weniger Lärm, Überdruß und unnütze Mühe
herrsche, dafür mehr Freiheit, Vergnügen
und wahrhafter Fortschritt; in der Christenheit
weniger Finsternis, Verwirrung und Streit,
dafür mehr Licht, Ordnung, Friede und Ruhe.“

(Comenius, A.C. [1657], siehe [31])

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	10
2	Lernen, Lehren und Brüche	20
2.1	Lerntheorien	20
2.2	Brüche	29
3	Rechnereinsatz in der Schule, Einblicke in die Praxis	38
3.1	Jugendliche und Computer – Wie alles begann	39
3.2	Die schrittweise Integration des neuen Mediums Computer	41
3.3	Substitution traditioneller Methoden durch rechnergestützte, zur Wichtigkeit des Übens	48
3.4	Beispiele für das Werkzeug Computer im Bruchrechnenunterricht	51
3.5	Lernprogramme und Trainer zur Bruchrechnung, Kriterien zur Auswahl von Lernprogrammen	54
3.6	Ist die Integration des Computers in den Unterricht unumgänglich?	56
3.7	Kulturgut Computerbedienung	58
3.8	Ausblick: Lernen, Bruchrechnen und Internet	60
4	Konkretisierung der Fragestellung, Ziel der Untersuchung	64
5	Protokollierungssystem zur Auswertung von Schülereinzelsitzungen	68
5.1	Synchronisation und Einspielung des Timers	69
5.2	Gang der Untersuchungen	71
5.3	Datenerhebung	72
6	Methodische Überlegungen	76
6.1	Zustände	77
6.2	Klassifizierung von Programmen	80
6.3	Zustandsübergänge	80
6.4	Zustandsmatrizen	86
6.5	Zur praktischen Umsetzung des Konzeptes	89
7	Verfassung der verwandten Software	104
7.1	Schematisierung der Lektion zur Addition	104
7.2	Definition von Regeltypen, Formulierung der Regeln	108

8	Auswertung, Situationen der Untersuchung	114
8.1	Vergleich von Bearbeitungswegen mit Hilfe multivariater Verfahren	114
8.2	Indizien, die auf latente Variablen zur Beschreibung von Probandenverhalten hinweisen	125
8.3	Situationen der Untersuchung	140
8.4	Der Anschluss test	147
8.5	Einschätzungen und Meinungen der Schüler	166
8.6	Zusammenfassung der erhobenen und ausgewerteten Daten	169
9	Klärung ausgewählter Aspekte der Rechtfertigungsproblematik	176
9.1	Konsequenzen der Untersuchung	176
9.2	Fazit	181
10	Beweise angeführter Sätze, Tabellen	184
11	Literatur- und Quellenverzeichnis	192

Einleitung

1 Einleitung

Die technische Entwicklung der letzten Jahre führte dazu, dass Computer nicht nur in fast jedem Büro, sondern auch in vielen Privathaushalten und den meisten Schulen zu finden sind. Neben den gängigen Anwendungen, wie Textverarbeitung, Tabellenkalkulationen und Spielen, wird im Heimbereich auch häufig der sinnvolle schulbegleitende Einsatz des Rechners gewünscht (vgl. [83], S. 9). Eltern möchten so schulischen Defiziten vorgreifen oder diese beseitigen, um ihrem Kind einen möglichst hohen und guten Abschluss zu ermöglichen. In vielen Fächern wird der Rechner mittlerweile, mehr oder weniger intensiv, unterrichtsbegleitend eingesetzt.

Der Beginn dieser Entwicklung liegt bereits einige Jahre zurück. Schon für Heimcomputer der ersten Generationen gab es Lernsoftware. Meist waren dies einfache Vokabeltrainer ohne festen Wortschatz. Mittlerweile bieten viele Schulbuchverlage für die im Unterricht eingesetzten Lehrbücher zusätzlich Software an (vgl. [112], S. 165, [150], S. 58). Auch bezüglich des Mathematikunterrichts erweitert sich das Angebot ständig. Für den Rechneinsatz in der Ober-, aber auch Unter- und Mittelstufe stehen Programme wie z.B. Derive, Maple, Mathematica oder auch EXCELTM zur Verfügung. Das Angebot im Bereich Geometrie erstreckt sich über reine Konstruktionsprogramme, wie Cabri Géomètre, bis hin zu Programmen mit spielerischen Elementen wie „Der Schatz des Thales“ (siehe auch [146]). Gerade für die Sekundarstufe I werden dabei häufig Programmpakete angeboten, die ein, zwei oder mehr Schuljahre umfassen (vgl. u.a. [67]). Sie sollen den Unterricht begleiten und den Schüler fordern und fördern. Der Entwicklung elektronischer Medien im unterrichtlichen Kontext wurde ein Kapitel dieser Arbeit gewidmet. Geschlossen wird dieses mit einem Ausblick in das internetgestützte Lernen. Sowohl bereits umgesetzte, als auch umsetzbare Konzepte werden hier berücksichtigt.

In dem großen Spektrum der Programme gibt es einige spezielle, welche zentral die Bruchrechnung behandeln (vgl. u.a. [5]). Im schulischen Bruchrechnenunterricht wird aus meiner Sicht momentan jedoch eher selten die Möglichkeiten neuer elektronischer Medien genutzt. So wird der Taschenrechner häufig erst ab Klasse sieben (vgl. [171], S. 326f), der PC sogar meist noch später in den Unterricht integriert, obwohl auch die frühere Nutzung sinnvoll sein kann (vgl. [127], S.303f). Trotzdem greifen bereits viele Haushalte¹ privat auf das neue Medium Computer zurück und verankern ihn damit in der Lebensrealität der Schüler.

Dass Unterricht auf Bedürfnisse, Interessen oder zumindest auf das Lebensumfeld der Schüler bezogen sein sollte, ist unbestritten. Untersuchungen zeigten, dass Schüler zunehmend auf Distanz zur Schule gehen, weil sie sich mit den dort vermittelten Inhalten nicht identifizieren können oder den Zusammenhang zum zukünftigen Berufsleben nicht sehen (vgl. [75], S. 177). Schüler differenzieren zwischen der schulischen und ihrer eigenen Realität. Ein ungünstiger Zustand, der nicht weiter gefördert werden sollte. Die Sicht es mit zwei verschiedenen Lernwelten zu tun zu haben, nämlich der heimischen und der schulischen, kann auch durch den Einsatz zusätzlicher Lernmaterialien im Heimbereich unterstrichen werden (vgl. [144], S. 10). Dabei scheint es noch nicht einmal notwendig, Schüler mit und an den Produkten in der Schule lernen zu lassen. Die Problematisierung der Produkte im jeweiligen Fachunterricht und kompetente Beratung der Eltern durch den Lehrer können ebenfalls

¹ Eine empirische Erhebung an 244 Schülern ergab, dass bereits 75% der Schüler der Klasse sieben einen eigenen PC besitzen und nutzen. (Universität Essen, Pallack, A.) Ähnliches fand das Münchener Institut für Jugendforschung (Quelle: [3])

sinnvolle Integrationsmöglichkeiten darstellen. In diesem Kontext muss natürlich auch die Frage erlaubt sein, ob Rechner nicht lediglich eine Modeerscheinung sind, die wie viele andere Entwicklungen zum Mathematikunterricht getestet und wieder verworfen werden. Aus meiner Sicht scheint die schulische Integration der neuen Medien mittelfristig unumgänglich, Rechner stellen also mehr als eine Modeerscheinung dar. Unbeantwortet bleibt trotzdem noch die Frage, wie sie Chancen zur Modellierung von Lernumgebungen und Lernprozessen bieten können?

Selbst Lernprogramme der neuen Generation sind meist noch nicht hinreichend weit entwickelt, um als Diagnosewerkzeug eingesetzt werden zu können. Der meist tutorielle Charakter bietet eine Art der Wissensaufbereitung, welcher der traditionelle Unterricht oft überlegen ist. Die Vermittlung von Wissen präsentiert sich in Programmen häufig passiv. Vor dem Schüler laufen ähnlich wie beim Fernsehen Sequenzen ab, die er entweder beachten oder ignorieren kann. Anders ist dies in den Fällen, in denen der Schüler regelmäßig und gezielt mit dem Programm interagieren muss. In der Literatur wird häufig stark differenziert und a priori zwischen guter und schlechter Software unterschieden (vgl. [133], Kapitel 3). „*Die Kontrolle über den eigenen Wissensstand leisten Lernprogramme in unvergleichlicher Weise.*“, schrieb Wolfgang Maier bereits 1997 (vgl. [112], S. 163). Das verfolgte Ziel von Lernprogrammen scheint durchaus attraktiv. Um jedoch nicht unnötig in Konzepte des programmierten Unterrichts zurück zu fallen, muss der Lehrer eine gute Übersicht über die verschiedenen Programme haben. Nur qualitativ gute und methodisch geeignete Programme sollten den Weg in Schule und Kinderzimmer finden. Die empirische Basis des computerunterstützten Unterrichts ist noch schmal (vgl. [171]) und erlaubt nur bedingt Aussagen über Vor- oder Nachteile von Lernprogrammen. Die Frage nach dem sinnvollen Einsatz von Lernprogrammen in der Sekundarstufe I kann somit nicht ausschließlich durch Rückgriff auf etwaige Erfahrungen beantwortet werden.

Mit dieser Arbeit wird letztendlich das Ziel verfolgt, sowohl einen inhaltlich als auch methodisch geprägten Ansatz zum möglichen Einsatz von Rechnern im Bruchrechnenunterricht oder zumindest Indizien für den Entwurf eines solchen Ansatzes zu schaffen. Hierzu gehört zum einen, dass vorhandene Konzepte und Möglichkeiten berücksichtigt werden, zum anderen jedoch auch, dass der Unterricht als Prozess im Ganzen Beachtung findet. In diesem Prozess entstehen Defizite, deren Behebung sowohl im schulischen als auch im außerschulischen Rahmen vorgenommen wird. Der Computer als Ergänzung und zur Substitution traditioneller Bestandteile des Unterrichts hat Zukunftschancen. Auch wenn eine positive Evaluation noch nicht möglich erscheint (vgl. [155], S. 411), lässt sich bereits erahnen, welches Potenzial die neuen Medien eröffnen. Ich möchte mich hier im Wesentlichen darauf beschränken, den Rechner unter dem Aspekt der Diagnose und Behebung von Defiziten bei Schülern zu betrachten. In Bezug auf Bruchrechnung fehlen noch die nötigen Algorithmen zur detaillierten Fehleranalyse und entsprechende Programme in welchen diese implementiert sind.² Trotzdem bieten einige Lernprogramme der neueren Generation gelungene Rückmeldungsansätze, welche bereits in den Unterricht integriert oder unterrichtsbegleitend eingesetzt werden könnten. Doch selbst, wenn das Problem der Fehlererkennung befriedigend gelöst werden würde, bliebe immer noch die Frage offen, inwieweit Schüler den PC als Medium zum Mathematiklernen und –üben akzeptieren und welche Lern- und Übungsformen somit sinnvoll erscheinen. Winter formulierte 1986 im Namen der GDM Fragen, die bezüglich eines gewünschten Computereinsatzes im Rahmen mathematik-didaktischer Forschung beantwortet

² An der Universität Bielefeld läuft das Projekt SEMU. Herr Henneke erstellte hier seine Dissertation zu Fehlergrammatiken im Bereich der Bruchrechnung. Wie er mir jedoch mitteilte, kann bis zur Realisation eines testbaren Programms noch einige Zeit vergehen (siehe auch [6]). Die Vermarktung soll über den Schrödel-Verlag erfolgen.

werden sollten. Eine dieser Fragen war, was das neue Medium Computer speziell für lernschwächere Schüler bedeuten kann (vgl. [50], S. 279). Gerade diese Frage ist für mich besonders attraktiv, da ich der klassischen Form der Nacharbeit fünf Jahre lang als Inhaber einer Nachhilfeschule nachging und stetig bei der Beratung von Eltern zwischen der klassischen Nachhilfe und Lernprogrammen entscheiden musste. Die Möglichkeiten, Unterricht mit Hilfe rechnergestützter Programme nachzuarbeiten, haben sich in der Zwischenzeit deutlich verbessert. Dass der Markt wächst, zeigen nicht zuletzt die Absatzzahlen von Softwareherstellern. So heißt es auf einer Homepage des Lernprogramms Addy aus dem Coktelverlag, dass bereits *Millionen von Kindern weltweit* mit Addy arbeiten (vgl. [7]). Dem schlichten Ignorieren von Lernprogrammen muss also eine nicht zu verachtende Gefahr zugeschrieben werden, da die unreflektierte Übernahme von evtl. sogar falschen Kalkülen und Rechnungen, wie sie in einigen Programmen vorkommen (vgl. [67]), kein sinnvolles Üben und Lernen darstellen können.

Um der Frage nachzugehen, wie Schüler überhaupt mit Lernprogrammen zur Bruchrechnung umgehen, müssen verschiedene Rahmenbedingungen diskutiert und beschrieben werden. Zum einen ist es von zentraler Bedeutung, in welcher Art und welchem Umfang Schüler derzeit mit Programmen zur Bruchrechnung konfrontiert werden. Im Sinne einer adäquaten Datenerhebung wurde zum einen eine möglichst übliche Lernumgebung modelliert und entsprechende Beobachtungs- und Messmethoden entwickelt. Der Einsatz des Computers als Nachhilfelehrer für den Schüler legte es nahe, die Probanden in Einzelsitzungen mit einem scheinbar geeignetem Programm zur Bruchrechnung zu konfrontieren³. Untersucht wurde Verhalten und Lernerfolg von Schülern, welche mit einem solchen Programm arbeiteten. Die Auswahl der Programme wurde an Kriterien orientiert, wie sie unter anderem von Pallack oder Herden und Pallack beschrieben wurden (vgl. [67]; [130], S. 51-63). Was in diesem Sinn Lernerfolg bedeutet, bedarf einer näheren Spezifizierung. Im schulischen Kontext ist es häufig notwendig, dass Schüler Regeln lernen und den Umgang mit ihnen üben. Bei Leistungsüberprüfungen werden diese abgerufen und deren Beherrschung durch den Lehrer kontrolliert. Schüler, die sicher mit den Kalkülen umgehen können, verschaffen sich somit einen Vorteil, wenn sie entsprechend geschult werden. Bei den meisten Aufgaben ist im nachhinein nicht zu entscheiden, ob eine Schülerlösung durch Verständnis oder durch das Lernen von Kalkülen zustande kam. In diesem Zusammenhang soll vom formalen Lernerfolg gesprochen werden, also einem Lernerfolg, der eine Steigerung der Lösungsquote von üblichen Aufgaben zur Bruchrechnung impliziert. Ein tieferes Verständnis ist dabei nicht unbedingt notwendig. Das bedeutet natürlich, dass im Rahmen schulischer Leistungsüberprüfungen Schülern Wissen abverlangt wird, das sie sich durch Fleiß oder auch Auswendiglernen aneignen können. Das ist jedoch im Fall schulischer Leistungsüberprüfung durchaus zutreffend (vgl. [97], S. 103). Der zu Beginn formulierten Intention von Eltern bei der Unterstützung ihrer Kinder durch Nachhilfe oder Lernprogramme, ist durch die Stimulierung des formalen Lernerfolgs in den meisten Fällen genüge getan. Letztendlich bauen auch kommerzielle Nachhilfeunternehmen auf dem formalen Lernerfolg einen großen Teil ihrer Werbung auf⁴. Ein weiterer wichtiger Aspekt der Vermarktung im Bereich des Nachmittagsmarktes ist der Spaß am Lernen (vgl. [133], S. 61f), mit dem ebenfalls geworben wird.

³ Es wird bewusst davon Abstand genommen **das** beste oder **ein** geeignetes Programm ausgewählt zu haben. Die Qualität oder Eignung bleibt der empirischen Prüfung vorbehalten.

⁴ So heißt es auf der Homepage des Studienkreises: „*Notenverbesserungen von ein bis drei Noten und zufriedene Eltern und Schüler sind die Früchte des Studienkreis-Systems.*“, ([9])

Als alleiniges Ziel des Bruchrechnenunterrichts scheint die Optimierung des formalen Lernerfolgs jedoch nicht hinreichend. Vielmehr sollte auch das Schülerverständnis gefördert und Schülervorstellungen kontextgestützt untermauert werden. Lernerfolg in diesem Sinn erhebt den Anspruch, Schüler zum flexiblen Umgang mit mathematischen Begriffen zu führen und ihnen eine hinreichende Assimilationsbasis zu liefern. Auch diesem Aspekt versuchen Lernprogramme gerecht zu werden, indem sie Einführungen liefern, die an die Anschauung des Schülers anlehnen (vgl. [130]). Die Frage, inwieweit Programme diesen Ausprägungen von Lernerfolg im Bruchrechnenunterricht gerecht werden können, lässt sich ohne empirische Indizien nicht sinnvoll beantworten.

Hilfreich, um Lernerfolge beobachten zu können, ist ein großer Kontrast von Fähig- und Fertigkeiten des Schülers vor und nach der Beschäftigung mit dem Programm. Aus diesem Grund wurden durch eine Aufgabensammlung Schüler mit Defiziten im Bereich der Bruchrechnung ausgewählt (vgl. [66]). Im Anschluss an die Arbeit mit dem Programm wurden die Schüler dann durch eine weitere Aufgabensammlung befragt und die Schülerantworten entsprechend analysiert.

Methodologisch war zu entscheiden, ob eine große Population zu denen jeweils wenig Informationen gesammelt werden oder eher eine kleine Population mit entsprechend hoher Informationsdichte ausgewählt wurde. In der Unterrichtsforschung stößt die Erhebung und Auswertung großer Datenmengen, wie sie zum Beispiel in der TIMSS Studie vorgenommen wurde, häufig auf Widerstand und Kritik⁵. Ein Grund für diese Unzufriedenheit ist unter anderem die geringe Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die übliche Erziehungspraxis. Das zergliedernde und massiv reduzierende Vorgehen lässt die Erziehungs- oder Lernsituation als Ganzes nicht mehr erkennen und versagt bei komplexen Zusammenhängen (vgl. [153], S. 41f). So kam es in letzter Zeit vermehrt zur Publikation von Fallstudien unter der Betonung bestimmter Aspekte von TIMSS (siehe hierzu unter anderem [92]; [118]). Aber auch Fallstudien, wie sie in der Psychologie und Soziologie üblich sind oder auch experimentelle Untersuchungen sind nicht frei von Kritik. Fallstudien beschreiben einige wenige Fälle sehr detailliert. So werden Personen Namen gegeben und auch durchaus Gefühle formuliert und beschrieben (siehe u.a. [162] aber auch [133]). Die Beschreibungen sind häufig chronologisch aufgebaut und wie Geschichten niedergeschrieben. Wissenschaftlichen Wert gewinnen solche Studien erst, wenn weitere Fälle auftreten die Parallelen zeigen oder versucht wird, gezielt Unterschiede oder Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen Fällen zu finden, um schließlich eine Systematisierung vorzunehmen. Der Einzelbefund ist nichts wert, wenn andere ihn nicht (vielleicht auch mit anderen Methoden) reproduzieren können (vgl. [152], S. 335). Die Vergleichbarkeit kann bei solchen Vorgehensweisen nur selten vollends gewährleistet werden. Eine weitere Idee war die des Experiments (siehe hierzu [157]). Ähnlich wie in den experimentellen Naturwissenschaften sollten Versuchskonstellationen hergestellt werden, die es erlauben, Experimente durchzuführen und vor allem zu wiederholen. Der wissenschaftliche Wert, der einmaligen Versuchsanordnungen abgesprochen wurde (vgl. [157], S. 463), sollte so gesteigert werden. In Kauf genommen werden musste dabei die erneute Entfernung von der pädagogischen Praxis. Die Entscheidung, ob nun eine kleine oder große Stichprobe gewählt wurde, konnte nicht von üblichen oder traditionellen Methodologien oder Richtlinien der Unterrichtsforschung gelenkt werden, da sie von einer Etablierung und Standardisierung noch weit entfernt sind. Unterschieden wird in der methodologischen didaktischen Diskussion im Wesentlichen zwischen qualitativen und quantitativen Verfahren. Beim Umgang mit diesen

⁵ Eine Sammlung von Argumenten und Kritikpunkten beider Seiten findet sich in [27].

Bezeichnungen ist Vorsicht geboten, da es durchaus üblich ist, diese Worte im Sinne von Kampfbegriffen zu verwenden (vgl. [27], S. 253). Ihrer ursprünglichen Intention können sie so nicht mehr gerecht werden. Die Begriffe werden uneinheitlich verwendet und bedürfen, nicht zuletzt da sie auch im Rahmen der Statistik und Messtheorie relevant sind, näherer Erläuterung. Sie werden im Folgenden unter Bezugnahme auf einen Artikel von Fromm exaktifiziert (vgl. [43]). Einigkeit besteht dahingehend, dass bei beiden Methoden eine Informationsreduktion vorgenommen wird. Bei quantitativen Methoden werden Informationen numerisch kodiert und schließlich mit Hilfe von Variablen erfasst. Es ist also durchaus möglich, dass bei quantitativen Untersuchungen Daten qualitativen Niveaus (nominales oder ordinales Niveau) erfasst werden. Statistische Modelle, wie sie im Rahmen quantitativer Analysen häufig angewandt werden, tragen ihren Nutzen im Wesentlichen darin, die eng begrenzte menschliche Fähigkeit große Datenmengen erfassen und weiterverarbeiten zu können, zu erweitern (vgl. [72], S. 235). Bei qualitativen Methoden findet eine hermeneutische Informationsreduktion statt (vgl. [43], S. 469). Einigkeit bezüglich der jeweiligen Adäquatheit der Methoden herrscht nicht (siehe hierzu u.a. [142]). Die Heuristik qualitativer Verfahren ist aus meiner Sicht oft ausschließlich subjektiv geprägt. Nicht das Zusammentragen von Indizien und deren anschließende Bewertung tragen zur Entscheidung bei, welche Szenen oder Situationen eines Unterrichts oder Interviews interessant sind und näherer Analysen bedürfen, sondern der Eindruck des jeweiligen Betrachters. Van Buer schreibt zu Vertretern der qualitativen Position: *„Aber nicht nur Theorie/Konstrukt- und auf der Erhebungs-Ebene, sondern auch auf der Auswertungs-Ebene führt die Auseinandersetzung mit den Fragen aus ‚qualitativem‘ Blickwinkel zum Überdenken bisheriger Analysepraktiken, obwohl auf dieser Ebene die Diskussion schwierig ist; denn Vertreter ‚qualitativer‘ Positionen lassen sich mit ihrer Kritik im allgemeinen nicht auf diesen ‚technischen‘ Teil von Untersuchungen ein, sondern kritisieren diesbezüglich eher global. Die von ihnen vorgeschlagenen ‚alternativen‘ Auswertungsmodelle (...) sind entweder nicht ‚alternativ‘ oder verharren auf einer eher abstrakten Ebene.“* ([27], S. 264). Es liegt mir fern, eine der beiden Positionen einzunehmen oder zu propagieren. Nicht die Methode soll die Frage, sondern die Frage die Methode lenken. Vor allem soll diese Arbeit kein Versuch sein, den Methodenstreit im Sinne eines Schlagabtauschs anzuheizen oder einen endgültigen Kompromiss anzubieten. Die Basis zur Entscheidung der Methodenfrage in Bezug auf diese Arbeit soll deshalb im Folgenden kurz angerissen werden.

Es sollte zum einen formaler Lernerfolg geprüft werden, was verhindert, dass lediglich ein oder zwei Probanden ausgewählt werden, da so auf keinen Fall eine hinreichende Vergleichsbasis bestünde, zum anderen sollte der Prozess Berücksichtigung finden, was große Stichproben eher verbieten. Im Sinne eines Kompromisses wurden 15 Probandensitzungen so beschrieben, dass interpretative Auswertungen möglich erschienen. Des Weiteren wurden Methoden angewandt und entwickelt, die schrittweise Reduktionen der Beobachtungen vornehmen und den Vergleich von Probandensitzungen mit Hilfe multivariater, deskriptiver und beschreibender Verfahren erlaubt. Der Weg vom beobachteten Verhalten hin zu seiner zusammenfassenden Interpretation soll so an Transparenz gewinnen (vgl. [27], S. 263f) und die bestehende Kontroverse zwischen quantitativen und interpretativen Verfahren lindern. Fromm spricht in diesem Zusammenhang von der Transformation von qualitativen bzw. quantitativen Daten, also der Verknüpfung mehrerer Verfahren unterschiedlicher Natur ([43]). Bevor eine Klärung unter Verwendung statistischer Verfahren, in der Literatur wird häufig von quantitativen Verfahren gesprochen, erfolgt, wird eine kontrollierte Informationsreduktion vorgenommen. Die Indizien welche die Verfahren liefern basieren natürlich weiterhin auf einer

Basis hoher Informationsdichte. Der Rückgriff auf niedrigere Ebenen der Reduktion ist also stets mit einem Zugewinn an Informationen verbunden. Den methodischen Überlegungen wurde in dieser Arbeit ein eigenes Kapitel gewidmet, das den eigentlichen interpretativen Beschreibungen vorangestellt wurde.

An Methoden zur Auswertung und Datenerhebung werden im Rahmen der didaktischen Forschung Bedingungen gestellt. Sie sollen sowohl adäquat als auch interpretierbar sein. Es werden somit sowohl Anforderungen an die verbale, als auch an die formale Beschreibung gestellt, denen versucht wurde gerecht zu werden. Primär ist dabei sicher die argumentative Absicherung der methodologischen Grundlage auf die, wie auch Heymann in einer Arbeit zur Modellierungsproblematik der schulischen Verhaltensforschung betont, in keiner empirischen Arbeit verzichtet werden sollte (vgl. [72], S. 249). Die formale Beschreibung und die Formulierung von Ähnlichkeitsmaßen wurde auf höchstens ordinales Niveau, d.h. nicht lineares Niveau, beschränkt. Dies impliziert Postulate, wie sie im Rahmen dieser Arbeit von Ähnlich- und Unähnlichkeitsmaße auf Bearbeitungswegen von Probanden gefordert werden⁶. Die Adäquatheit einer Methode schafft erst die Grundlagen ihrer Interpretierbarkeit. Ist die Methode nicht adäquat, können Fehlinterpretationen die Folge sein, die dann keinerlei Wert mehr haben. Welches Datenniveau jeweils zugrunde liegt, bestimmen diejenigen, die die Daten verursacht haben. In unserem Fall also Probanden. Es muss im Allgemeinen davon ausgegangen werden, dass dem Beobachter das genaue Datenniveau unbekannt ist. Soll seine Auswertung dennoch adäquat sein, ist der Auswerter gezwungen, ein Datenniveau zu unterstellen, das nicht stärker sein kann als das tatsächliche Datenniveau. Im Bereich psychometrischer Aussagen bedeutet dies wohl, dass man sich auf Aussagen der Form „je desto“ beschränkt, also ein ordinales Datenniveau vorauszusetzen ist. Das Datenniveau hat sowohl Auswirkungen auf die Adäquatheit als auch auf die Interpretierbarkeit. Da viele der klassischen statistischen Methoden, wie zum Beispiel die Faktorenanalyse oder die metrische MDS (vgl. u.a. [39]), häufig von intervall- oder rationalskalierten Daten ausgehen, ist Vorsicht bei deren Anwendung geboten, da vorgenommene Reduktionen nicht mehr adäquat sein müssen. Dagegen unproblematisch sind bei nominalen oder ordinalen Daten Verfahren, wie die der formalen Begriffsanalyse, wo die Daten in einem formalen Kontext zusammengefasst werden. Die formale Begriffsanalyse (siehe hierzu vor allem [45]) bietet gegenüber anderen Analysemethoden den Vorteil, dass sie nicht reduziert. Damit erübrigt sich die Adäquatheitsfrage. Die Begriffsverbände repräsentieren einen formalen Kontext vollständig. Dies impliziert jedoch den Nachteil, dass mit Hilfe von Begriffsverbänden jeweils nur kleine Mengen von Gegenständen und Merkmalen miteinander verglichen werden können, was aber im Rahmen ihrer Verwendung in dieser Arbeit hinreichend ist. Die formale Begriffsanalyse unterstützt in dieser Arbeit die Wissensverarbeitung und macht Zusammenhänge zum Zweck der Kommunikation und Diskussion verfügbar (siehe hierzu auch [139]). Sie stellt ein Werkzeug zur Verdeutlichung hierarchischer Zusammenhänge zwischen Fertigkeiten einzelner Schüler dar. Ebenfalls für ordinales Datenniveau geeignet sind ausgewählte Verfahren der Clusteranalyse (siehe u.a. [12]; [23]). Verfahren der MDS, die sich unter anderem in der Psychologie etablierten (vgl. u.a. [24], S. 115-132), werden unterschieden in metrische und nicht metrische Verfahren. Ziel ist es, ähnlich wie in der Faktorenanalyse (siehe hierzu u.a. [94], S. 135-234), die gemessenen Variablen auf möglichst wenige latente Variablen zurückzuführen. In Frage kamen aus den bereits angeführten Gründen nur nicht metrische Verfahren. Aufgrund einer gegebenen Unähnlichkeitsmatrix wird versucht, eine Repräsentation

⁶ Bei Bearbeitungswegen handelt es sich um formal erfasstes informationsreduziertes Probandenverhalten. Eine ausführliche Erläuterung befindet sich in Kapitel 6.

möglichst hoher Güte des Probandenverhaltens in einem möglichst niedrig dimensionalen Raum zu finden. Formale Stressmaße zur Beurteilung solcher Repräsentationen sind dabei nicht immer adäquat (vgl. [65]). Um jedoch Interpretierbarkeit zu gewährleisten, sind adäquate Maße notwendig, d.h. Maße, die mit ordinalen Transformationen der jeweiligen Unähnlichkeiten kompatibel sind. Interpretierbarkeit bedeutet hier, dass das Betrachten und Einordnen des Einzelfalls unterstützt werden soll. Renkl beschreibt diesbezüglich einen Schwachpunkt quantitativer Methoden gegenüber qualitativen (vgl. [143]). Es werden jedoch, wie bereits angeführt wurde, in beiden Gattungen der Methodik Reduktionen vorgenommen, die schließlich das was überhaupt interpretiert werden kann einschränken. Trotzdem sollte die gewählte Methode dem Individuum gerecht werden. Interpretierbarkeit im angeführten Kontext wird durch die Repräsentation von Probanden in Diagrammen, wie sie zum Beispiel Methoden der multidimensionalen Skalierung nahe legen, gewährleistet (vgl. [107]). Aufwändigere qualitative Methoden sind aus meiner Sicht zur Verarbeitung der Gesamtdatenmenge nicht notwendig. Selbst die scheinbar geringe Zahl der Probanden wäre im Fall rein qualitativer Studien nicht mehr tragbar. Natürlich bin ich mir bewusst, dass dieses Vorgehen Kritik in Bezug auf Detailtreue und Individualität provoziert. Welchen Vorteil die vollständige Beschreibung beobachtbaren Verhaltens haben sollte, ist jedoch ohnehin fragwürdig, da der Beobachter immer seinen Blick auf bestimmte Teilaspekte lenkt. Eine sehr hohe Detailtreue bedeutet aus dieser Sicht nicht immer einen Vorteil und kann durchaus dazu führen, vom Wesentlichen abzulenken. Die Wahl und Zusammenstellung der Methoden ist ein Kompromiss. Wie bereits angeführt wurde ist die Adäquatheit der Methode notwendige Voraussetzung für die Interpretierbarkeit. In Bezug auf die MDS bedeutet dies, dass Probanden so repräsentiert werden, dass deren Einordnung sinnvoll und mit den Ausgangsdaten konsistent ist. Da die aus der Literatur bekannten Kriterien im Allgemeinen nicht adäquat sind, wurde im methodischen Teil dieser Arbeit ein Stressmaß entwickelt, das adäquat im Sinne des zuvor präzisierten Adäquatheitsbegriffes ist. Verzichtet wurde dabei jedoch auf die Entwicklung einer Iteration zur Optimierung von Punktkonstellationen. Eine weitere statistische Methode, die zum Vergleich von Probandensitzungen herangezogen wurde, ist die Clusteranalyse, speziell das Complete-Linkage-Verfahren. Für weitere Ausführungen und nähere Informationen sei auf Kapitel 6 dieser Arbeit verwiesen. In Bezug auf Fromm kann im Rahmen dieser Arbeit von einer Transformation von Verfahren, also der Verknüpfung mehrerer Verfahren unterschiedlicher Natur, gesprochen werden. Die Anwendung mehrerer Verfahren erlaubt schließlich auch deren Vergleich und weist auf Stabilitäten, die entsprechende Interpretationen stützen.

Die Rechtfertigungsproblematik des unterrichtsbegleitenden Einsatzes von rechnergestützten Programmen zur Bruchrechnung wird in dieser Arbeit unter verschiedenen Ausblendungen beleuchtet. Es wird davon ausgegangen, dass Unterricht ein gelenkter Vorgang ist⁷, der äußeren Rahmenbedingungen genügen muss. Die Adaptivität der hier entwickelten Konzepte wird auf der Basis der historischen Entwicklung, aktueller methodischer Ideen, schulischer Sachzwänge und empirischer Indizien beurteilt. Der Frage, ob es sinnvoll sein kann, Lernumgebungen der Bruchrechnung rechnergestützt zu modellieren, kann aus meiner Sicht nur unter Berücksichtigung hinreichender Adaptivität nachgegangen werden. Dies widerspricht natürlich nicht der Tatsache, dass der Schüler als Individuum ernst genommen werden muss und das Lernen und Lehren von Bruchrechnung unter Berücksichtigung verschiedener Paradigma betrachtet werden sollte. In diesem Sinn schließt die Arbeit mit einer Beschreibung von

⁷ D.h., dass der Lehrer im Rahmen seiner Möglichkeiten Inhalte, Gegenstände und auch Methoden auswählt.

Rahmenbedingungen und Maßnahmen, die aus meiner Sicht das Üben und Lernen im Rahmen der schulischen Bruchrechnung erleichtern oder zumindest geschickt unterstützen können. Trotzdem distanzieren sich die Ausführungen von einer Alltagstheorie, die konkrete Handlungen im Rahmen des schulischen Unterrichts explizieren. Ziel ist es nicht, einen instruktiven Ansatz für das Lernen im Rahmen der Bruchrechnung vorzuschlagen. Vielmehr werden mögliche Konsequenzen für die Unterrichtspraxis genannt, die dem Pädagogen helfen sollen, in Bezug auf seine Lerngruppen Unterrichtsumgebungen zu modellieren und Lernprozesse zu steuern.

In dieser Arbeit wird, und das sollte dieser erste Einblick bieten, die Auffassung vertreten, dass das Lernen und Lehren von Mathematik im schulischen Rahmen kein Prozess ist der durch Spekulationen und paradigmatische Sichtweisen geprägt sein sollte, sondern vielmehr ein Prozess, der vielfältigen Einflüssen ausgesetzt ist, deren Wirkung stets einer genaueren Betrachtung bedarf. Jeweilige Strömungen müssen sich Überprüfungen aussetzen und ggf. rechtzeitig verworfen werden, um unsere Schüler vor einer Pädagogik zu schützen, die unbegründete Prinzipien in den Mittelpunkt des Unterrichts stellt.

Lernen, Lehren und Brüche

2 Lernen, Lehren und Brüche

„Jedem Computerprogramm, das Wissen vermitteln soll, liegt – ob nun gewollt oder ungewollt – ein Lernmodell zugrunde. Es macht sich dem Modell entsprechende Methoden und Verfahren zunutze, um der originären Aufgabe, Wissensvermittlung und Wissenserhalt, gerecht zu werden. Einige dieser Techniken, die heute noch Anwendung finden, sind so alt wie die Sprache selbst. Es sind Kulturen bekannt, die aufgrund fehlender Schrift Wissen mittels Geschichten und Sagen aufzeichneten, so dass sie Märchenerzähler hervorgebracht hatten, die bis zu 200.000 Geschichten gekannt haben.“

([150], S. 14)

Nicht nur Computerprogrammen, sondern auch traditionellen Formen der Wissensvermittlung liegen Modelle zugrunde. Dieses Kapitel liefert zunächst einen Einblick in die drei wichtigsten erkenntnistheoretischen Ansätze unseres Jahrhunderts: Behaviorismus, Kognitivismus und Konstruktivismus (vgl. [17], S. 99f). Der Einblick soll hinreichend sein, um Lernsoftware und klassische Lerngänge einem der Lernparadigmen zuordnen zu können.

Speziell werden dann einige Aspekte der Bruchrechnung in ihrem schulischen Kontext vorgestellt. Berücksichtigt werden hier auch Schülerdefizite, die im Bruchrechnenunterricht entstehen und sich durch systematische oder sporadische Schülerfehler äußern. Um geeignete Gegenmaßnahmen einleiten zu können, muss die Natur der Fehler ergründet, die Art der Schwierigkeiten also diagnostiziert werden. Schüler selbst sind meist nicht in der Lage, Quellen ihres Unverständnisses zu nennen, was oft noch nicht einmal nach Behebung der Ursachen der Fall ist (vgl. [168], S. 19). Das heißt, dass Schüler nicht mehr wissen, was sie nicht wussten oder nicht verstanden hatten. Systematische Lerndiagnosen, welche die entscheidenden Stellen aufspüren könnten, gibt es im Bereich der Schule kaum. Die Diagnose von Schülerfehlern im Bereich der Bruchrechnung stellt ein durchaus aktuelles Feld mathematikdidaktischer und mathematischer Forschung dar. Henneke entwickelte auf empirischer Basis Grammatiken, welche die Diagnose von Schülerdefiziten erleichtern oder sogar erst ermöglichen sollten (vgl. [62]). Ausschnitte seines Konzepts werden in diesem Abschnitt berücksichtigt. Abschließend werden einige konkrete Gegenmaßnahmen vorgestellt. Bevorzugt wird in dieser Arbeit die Addition und Subtraktion berücksichtigt. Dies liegt darin begründet, dass die von mir durchgeführten Untersuchungen sich ebenfalls auf diesen Bereich der Bruchrechnung beschränken.

2.1 Lerntheorien

„Eine oft undifferenzierte Betrachtungsweise des Lernprozesses ist unserer Auffassung nach eine der Ursachen für den Glaubenskrieg verschiedener pädagogischer Richtungen. Je nachdem, welche Wissensstruktur gerade betont und in den Mittelpunkt pädagogischer Bemühungen gerückt wird, werden entsprechende Lehr- und Lernstrategien nicht nur bevorzugt angewendet, sondern leider oft auch als der „einzig wahre Weg“ übergeneralisiert.“

([17], S. 19f)

Vorweggenommen sei, dass hier kein Paradigma als Wegweiser zum einzig wahren Lernen propagiert wird. Aufgrund der aktuellen Entwicklung in den Erziehungswissenschaften und auch der Lehrerbildung wäre es wohl der Konstruktivismus, der als Maß aller Dinge

angesehen werden könnte. Ziel dieses Abschnitts ist es vielmehr, einen Überblick über die verschiedenen kognitionspsychologischen Zweige zu geben, um so die Grundlagen der Lernpsychologie, die neben den Fachwissenschaften die wichtigste Bezugswissenschaft zur Didaktik bildet (vgl. [84], S. 3), einen angemessenen Stellenwert einzuräumen.

Die im Folgenden beschriebenen Ansätze werden in späteren Kapiteln als Werkzeug zur Einordnung von Lernprogrammen und Schülerverhalten genutzt. Zu jedem Lernparadigma wird eine Abbildung präsentiert, welche das jeweilige Lernmodell repräsentiert. Die Ausführungen sind angelehnt an Baumgartner und Payr ([17]), berücksichtigen jedoch auch andere Autoren.

2.1.1 Behaviorismus



Abbildung 1, Skizze eines Mathematik-LK Abiturienten; Quelle: [60]

Die Psychologie des Behaviorismus ist in ihren Grundaussprägungen ein Kind der Aufklärung und trägt ihre Wurzeln sowohl in Comptes Positivismus, als auch in Descartes Vorstellungen einer menschlichen Maschine (vgl. [148]). Watson begründete diese Richtung der Psychologie im Jahre 1913 mit seiner Arbeit „*Psychology as the behaviorist views it*“ (vgl. [148]). Die Spekulationen um innerseelische Prozesse sollte damit als unwissenschaftlich dargestellt werden und somit zur Aufgabe dieses Forschungszweiges führen. Ausschließlich die Beobachtung und Messung des Verhaltens sollte Aufschlüsse über Lernprozesse bieten (vgl. [84], S. 3; [149]; [150], S. 16; [178], S. 141f). Lehrstrategien, welche sich auf den Behaviorismus berufen, gehen davon aus, dass Lernen ein konditionierter Reflex ist. Dieser wird durch Adaption erworben (vgl. [17], S. 101). Watson übertrug hierzu einige der für die Erklärung von Tierverhaltensweisen gedachten Ergebnisse auf die Lernpsychologie. Die Grundlagen hierzu legte der Russe Pawlow. Er setzte Tiere bestimmten Reizen aus und

beobachtete deren Reaktionen (vgl. [84], S. 3f). Nicht zuletzt aufgrund dieser Wurzeln kam der Behaviorismus später in Verruf.⁸

Watson abstrahierte von den Experimenten und kam dabei zu folgenden Ergebnissen: Dem Lernenden wird ein Stimulus (Input) gegeben. Dieser bedingt beim Lernenden ein bestimmtes Verhalten, welches schließlich das erwünschte Wissen beim Lernenden aufbaut. Einzige Aufgabe der Forschung ist es, geeignete Inputs zu finden, den Lernenden zu beobachten oder zu befragen (Output) und ihm anschließend ein geeignetes Feedback zu geben. Die Vorgänge im Schüler (oder allgemeiner Lernenden) spielen dabei keine Rolle. Das Hirn der Lernenden kann als „Black Box“ angesehen werden (vgl. [17], S. 101)

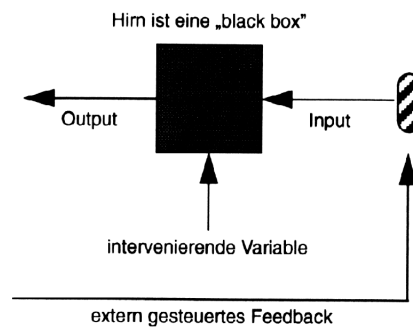


Abbildung 2, Lernmodell des Behaviorismus (schematisch);

Quelle: ([17], S. 102)

Das Hirn muss zum Lernen schlicht mit dem entsprechenden Wissen gefüllt werden. Abbildung 1 zeigt die Skizze eines Oberstufenschülers. Er fertigte diese kurz vor seinem Abitur an. Seine Darstellung visualisiert, was der Behaviorismus verkörpert. Eine Auswirkung des Behaviorismus war der von Skinner begründete „Programmierte Unterricht“. Dessen Konzept wird in Abschnitt 3.2 auf Seite 41f näher beschrieben. Der Programmierte Unterricht fand viele Kritiker, von denen häufig bemängelt wurde, dass lediglich die Beobachtung des Verhaltens keine vollständige Beschreibung des geistigen Zustands ermöglicht und somit Folgerungen unzulässig sind. Weitere Ausführungen hierzu finden sich u.a. in Baumgartner und Payr ([17], S. 102f).

2.1.2 Kognitivismus

„Wenn sich ein Computerprogramm wie ein Mensch verhält, d.h. wenn es ähnliche Zeitunterschiede bei der Lösung verschieden schwieriger Aufgaben aufweist oder dieselben Fehler wie ein Mensch macht, so zählt dies als Evidenz dafür, dass die angenommene Wissensrepräsentation psychologisch real sein müsste“

([17], S. 104f)

Bis in die 50er Jahre des letzten Jahrhunderts wird die akademische Psychologie von Forschungen auf dem Gebiet behavioristischer Modelle bestimmt (vgl. [148]). Der Kognitivismus entstand als Gegenströmung zum Behaviorismus parallel in Europa und den USA (vgl. [84], S. 5). Im Kognitivismus geht man nicht mehr davon aus, dass das menschliche Gehirn eine Black Box ist, die von außen gefüllt werden muss, sondern schreibt ihm einen

⁸ Eine breite Übersicht über Experimente zum Behaviorismus findet man in [148].

verarbeitenden Status zu. Aus dieser Theorie entstand auch die Hypothese, dass Computersysteme und das Hirn äquivalente Systeme darstellen, d.h. dass ein Computer entwickelt werden kann, der im Verhalten nicht vom Menschen zu unterscheiden ist (vgl. obiges Zitat). Vertreter dieser Hypothese werden der „starken KI“⁹ zugeordnet (vgl. [17], S. 104). Selbst wenn ein Chirurg die Schädeldecke des Menschen öffnet, hat er keine Möglichkeit, die im Hirn ablaufenden Prozesse nachzuvollziehen. Es bleibt nur die Möglichkeit der indirekten Beobachtung (vgl. [150], S. 20). Wichtiger Wegbereiter waren die Lernmodelle von Hebb. Er versuchte in den fünfziger Jahren, Lernen durch Modellierung elektrochemischer Vorgänge im Gehirn zu erklären (vgl. [84], S. 5). Hieraus entwickelten sich im Rahmen der kognitionspsychologischen Forschung Modelle zu Lernarten wie Regellernen, Beobachtungslernen, Handlungslernen oder auch Transferlernen (vgl. [150], S. 20), welche auch in Gagnés Lernkategorien eine Rolle spielen.

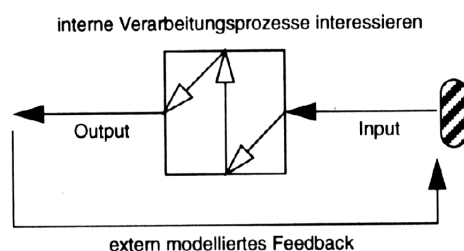


Abbildung 3, Lernmodell des Kognitivismus (schematisch);

Quelle: [17], S. 105

Wird der Kognitivismus radikal aufgefasst, so werden Verhaltensweisen von Individuen vernachlässigt. Nach der Ansicht von Miller, Galanter und Pribram beschäftigen sich diejenigen Wissenschaftler, welche den Kognitivismus ihrer Forschung zugrunde legen zwar hinreichend mit Wahrnehmung, Aufmerksamkeit und auch Informationsverarbeitung, Handlungs- und Verhaltensaspekte bleiben jedoch weitgehend unberücksichtigt (vgl. [148]). In der strengen Theorie können durch die vollständige Kenntnis des „Verarbeitungssystems“ sowohl innere, als auch äußere Erkenntnisprozesse (offenes Verhalten) hinreichend beschrieben werden (vgl. [148]). Ausführungen zu Kritikpunkten finden sich wiederum in Baumgartner und Payr (vgl. [17]), aber auch in Saemmer (vgl. [148]).

2.1.3 Konstruktivismus

„Lernen wird als aktiver und vor allem konstruktiver Prozess verstanden, in dessen Vordergrund die persönliche Erfahrung des Lernenden gestellt wird. Er läuft stets in bestimmten Situationen ab (situativer Lernprozess) und umfasst auch soziale Komponenten (sozialer Lernprozess). Der Lehrende erhält die Rolle eines Trainers oder Coaches, eines Subjekts, das aufgrund seiner Erfahrung Wissen vermittelt. Er ist eine Gestalt, die durchaus Fehler machen kann und darf.“

(vgl. [150], S. 23f)

Der Konstruktivismus hat seine Wurzeln in den USA, wo er nach dem zweiten Weltkrieg entwickelt wurde. Menschen lernen demnach durch einen aktiven Prozess, welcher durch ihre

⁹ KI: Künstliche Intelligenz

Vorerfahrungen geprägt ist. Wissen wird in komplexen realen Lebenssituationen konstruiert (vgl. [17], S. 107). Charakteristische Unterschiede zum Kognitivismus beschreiben Baumgartner und Payr wie folgt:

„Im Gegensatz zum Kognitivismus steht nicht das Lösen bereits präsentierter Probleme im Vordergrund, sondern das eigenständige Generieren von Problemen. Probleme bieten sich nicht von selbst an, sondern müssen erst in verwirrenden, unsicheren, unvorhersehbaren und zum Teil chaotischen Situationen konstruiert werden.“

([17], S. 107)

Der Mensch bekommt demnach nicht sequentiell Inputs und erzeugt Outputs, sondern steht in einer energetischen Austauschbeziehung mit seiner Umwelt.

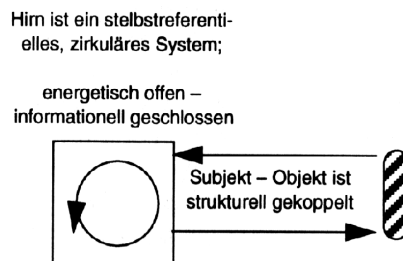


Abbildung 4, Lernmodell des Konstruktivismus (schematisch);

Quelle: [17], S. 108

Lernen ist nur möglich, wenn der Lernende motiviert und bereit ist, Wissen zu konstruieren. Die Lernende übernimmt Steuerungs- und Kontrollprozesse. Lernen ohne Selbststeuerungsprozesse scheint nicht möglich. Äußere Faktoren sozialer Art können bei der Modellierung eines Lernprozesses ähnlich wichtige Rollen spielen wie fachliche Vorerfahrungen von Lernenden. Lernen ist situativ und kann von äußeren Faktoren nicht gelöst werden.

Mittlerweile haben sich einige konstruktivistische Strömungen herausgebildet. Hierzu gehören die *Situierte Erkenntnis* (Bei der Konstruktion von Wissen spielen soziale Umgebung und der inhaltliche Kontext eine tragende Rolle), der *Narrative Anker* (Konstruktionen werden an Erzählungen oder Geschichten fixiert), die *Kognitive Flexibilität* (Wissen wird in verschiedenen Kontexten konstruiert, verschiedene Zugänge sollen Begriffe verdeutlichen) oder auch die *Kognitive Handlungslehre* (Lernende soll in authentischen Zusammenhängen, also an der Wirklichkeit orientiert und durch Experten präsentiert, ihr Wissen konstruieren) (siehe [84], S. 10f).

2.1.4 Psychologische Lernparadigmen und Mathematikunterricht

Mathematikunterricht hat Geschichte. Doch nicht nur das Wissen und die Didaktik der Griechen oder Ägypter zählt dazu, sondern auch Entwicklungen der letzten Jahrzehnte, die Schule und Mathematikunterricht zu dem gemacht haben was sie heute sind. So gehören neben entwickelnden Unterrichtsabschnitten auch Phasen der Sicherung oder des Übens traditionell zum üblichen Umfang des Unterrichts. Schule kann hier nicht als geschlossenes System aufgefasst werden, in dem sich Wissen nur in den Köpfen der Schüler abspielt und entwickelt. Gerade Phasen des Übens sollten an von außen gegebenen Standards angeglichen werden, um

vor allem schwächere Schüler nicht zusätzlich zu verwirren. Wissen und das zugehörige Lernen muss kompatibel zu gesellschaftlich, wissenschaftlich und kulturell gewachsenem Wissen gestaltet werden.¹⁰ So unstrittig wie diese Aussage in Bezug auf das Erlernen der Rechtschreibung und grammatikalischer Regeln im Bereich der Sprachen, dem Üben von Notationen in der Musik oder dem Training von Bewegungsabläufen im Sport ist, so strittig wird sie, wenn man neuere Ideen zum Mathematikunterricht verfolgt. Die Betroffenen, also Lehrer, Schüler und deren Eltern, zeigen sich aus meiner Erfahrung von neuen Ideen, wie z.B. offenen Lernumgebungen, recht unbeeindruckt und üben mit den Kindern in althergebrachter Weise, was insbesondere für die Bruchrechnung gilt, da Schülern in der relevanten Klassenstufe häufig noch von Eltern geholfen wird (vgl. Abschnitt 3.3). Das folgende Beispiel soll erläutern, inwiefern Formulierungen von Regeln der Bruchrechnung, trotz fachlicher Richtigkeit, aufgrund der oben beschriebenen Umstände für den Unterricht ungeeignet sind.

Im Bruchrechnenunterricht wird zur Division von Brüchen häufig die Regel formuliert, dass zwei Brüche dividiert werden, indem man den Divisor mit dem Kehrwert des Dividenden multipliziert. Oder formalisiert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Warum sollte jedoch nicht auch die folgende Regelformulierung tragbar sein:

Zwei Brüche werden dividiert, indem man sie vorab gleichnamig macht und anschließend lediglich deren Zähler dividiert. Oder formalisiert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} : \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = a \cdot d : c \cdot b = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Auch diese Regel erfüllt ihren Zweck. Aus einem Erfahrungsbericht ([145]) ist bekannt, dass dieser Zugang mit Problemen behaftet ist, sobald Eltern versuchen, ihren Kindern bei den Hausaufgaben zu helfen oder ein Buch zur Nacharbeit herangezogen wird. Trotzdem kann diese Regel die Krönung eines streng konstruktivistisch angelegten Lehrgangs sein. Vielleicht haben auch viele Schüler gerade diese Regel selbst gefunden und halten sie deshalb für besonders geeignet. Trotzdem ist sie unter Berücksichtigung der schulischen Literatur und dem traditionellen Satz von Regeln zur Bruchrechnung nicht haltbar. Der Lehrer schläge bereits vorab einen konfliktbehafteten Weg ein oder lässt diesen zumindest zu. Die zu erwartenden Nachteile scheinen gegenüber den möglichen Vorteilen (einem eventuell modernen, offenen und konstruktivistisch orientierten Zugang zur Division von Brüchen) zum einen nicht absehbar und zum anderen nicht tragbar. Dies wird noch klarer, wenn berücksichtigt wird, dass ein nicht zu verachtender Prozentsatz der Schüler nach der Orientierungsphase die Schulform wechseln. Ebenfalls für ungeeignet halte ich das Nachschieben der üblichen Regel. So würde den Schülern der Eindruck vermittelt, dass alles zuvor erarbeitete plötzlich vom Lehrer überdeckt wird und somit unnötig erscheint.

Der Konstruktivismus und seine unterrichtlichen Konsequenzen scheinen nicht in jeder Form zur Modellierung schulischer Lehrgänge geeignet. Ähnliche Argumente lassen sich für Lerntheorien wie den Behaviorismus finden, dessen Umsetzung im Programmierten Unterricht erfolgte. Baumgartner und Payr fassen die drei Ansätze zusammen und beschreiben charakteristische Unterschiede:

¹⁰ Hierzu gehört auch das Erlernen bestimmter Notationen, Methoden oder historischer Aspekte der Mathematik.

Kategorie	Behaviorismus	Kognitivismus	Konstruktivismus
Hirn ist ein	passiver Behälter	informationsverarbeitendes „Gerät“	informationell geschlossenes System
Wissen wird	abgelagert	verarbeitet	konstruiert
Wissen ist	eine korrekte Input-Outputrelation	ein adäquater interner Verarbeitungsprozeß	mit einer Situation operieren zu können
Lernziele	richtige Antworten	richtige Methoden zur Antwortfindung	komplexe Situationen bewältigen
Paradigma	Stimulus-Response	Problemlösung	Konstruktion
Strategie	lehren	beobachten und helfen	kooperieren
Lehrer ist	Autorität	Tutor	Coach, (Spieler)Trainer
Feedback	extern vorgegeben	extern modelliert	intern modelliert

Tabelle 1, Lernparadigmen; Quelle: [17], S. 110

Trotzdem beinhaltet jede dieser Lerntheorien sinnvolle und praxisrelevante Ansätze, welche dem Lehrer unmittelbar bei der Vorbereitung und Durchführung seines Unterrichts helfen können. Hubwieser führt solche Praxistipps an und strukturiert sie wie folgt:

Behaviorismus:

- „angenehme Lernumgebungen mit entspannter, aufmerksamkeitsfördernder Atmosphäre schaffen,
- Kontinuierlich, aber differenziert positiv verstärken (loben),
- Bestrafung vermeiden,
- Abwehrreaktionen und Angsterzeugung vermeiden“

([84], S. 4)

Kognitivismus:

- „Den Lernenden sollte vor dem Beginn der Unterrichtseinheit das Ziel und der Sinn des Lernvorgangs deutlich gemacht werden (Zielangabe).
- Der Lehrstoff ist in übergeordnete Sinnzusammenhänge einzuordnen.
- Die Lerninhalte müssen so strukturiert dargeboten werden, dass die Bildung bzw. Übernahme von Kategorien erleichtert wird.
- Es sollen möglichst viele Anknüpfungspunkte an bekanntes Wissen angeboten werden.“

([84], S. 6)

Konstruktivismus:

- „Aktive Auseinandersetzung mit dem Stoff ist soweit möglich Pflicht.
- Die Schüler sollen sich Problemlösemethoden selbst erschließen.
- Der Lehrer fungiert als Berater – statt als Präsentator.

- *Während des Unterrichts ist genügend Zeit für die Konstruktionsvorgänge zu lassen.*
- *Lernumgebungen müssen so nah wie möglich an der Wirklichkeit liegen.*
- *Derselbe Stoff ist aus unterschiedlichen Perspektiven zu erschließen.“*

(vgl. [84], S. 11)

Die Lernumgebung ist in Abhängigkeit von den Zielen zu gestalten. Dabei können sowohl behavioristische, kognitivistische als auch konstruktivistische Ansätze ihre Berechtigung und Anwendung finden. Übungseinheiten sollen bereits erarbeitete Zusammenhänge vertiefen und festigen. Unter Umständen ist es jedoch auch erforderlich, Schülern mechanische Vorgänge näher zu bringen (z.B. aus Gründen der zeitlichen Ökonomie). Des Weiteren sind algorithmische Aspekte durchaus allgemeinbildende Elemente des Mathematikunterrichts (vgl. [73]). Der Lehrende geht dabei davon aus, dass seine Aufgabenauswahl bei Schülern bestimmte günstige Prozesse anregt. Durch sein Verhalten und seine Intention, stützt sich dieser dann auf den behavioristischen Ansatz, welcher so praxisrelevant wird. Zech bemerkt hierzu:

„... Auf der anderen Seite scheinen behavioristische Theorien nach wie vor geeignet, mechanische Lernformen zu beschreiben. Sie helfen uns, günstige Bedingungen für erwünschtes mechanisches Lernen wie z.B. gewisse Automatisierungsvorgänge beim Rechnen und Zeichnen anzugeben wie auch unerwünschtes mechanisches Lernen im Mathematikunterricht (>>Lernen nach Schema F << u.ä.) besser zu verstehen und zu vermeiden.“

([178], S. 143)

Zech hebt hiermit die immer noch existierende und berechtigte Praxisrelevanz behavioristischer Ansätze hervor. Jedoch ist eine starke Relativierung zu den Idealen der Begründer notwendig. Watson schrieb 1930:

„Gebt mir ein Duzend gesunder, wohlgebildeter Kinder und meine eigene Umwelt, in der ich sie erziehe, und ich garantiere, dass ich jedes nach dem Zufall auswähle und es zu einem Spezialisten in irgendeinem Beruf erziehe, zum Arzt, Richter, Künstler, Kaufmann oder zum Bettler und Dieb, ohne Rücksicht auf seine Begabungen, Neigungen, Fähigkeiten, Anlagen und die Herkunft seiner Vorfahren.“

(Watson 1930, zitiert nach [148])

Wissen in Kontexten zu vermitteln beruht zu großen Teilen auf kognitivistischen Ansätzen. Hierbei z.B. narrative Anker zu nutzen, findet seinen Ursprung eher im Konstruktivismus (vgl. [84], S. 10). Gerade die Offenheit bezüglich der zugrunde gelegten Lerntheorie charakterisiert somit Mathematikunterricht. Jegliche Beschränkung birgt Gefahren der Ausblendung und nimmt methodisches und inhaltliches Potenzial. Lerntheorien unterliegen Modeströmungen. So wird es nur wenige Lehrer geben, die nicht meinen, dass ihr Unterricht konstruktivistische Elemente enthält. Glasersfeld, einer der Begründer des radikalen Konstruktivismus, merkt hierzu kritisch an:

„In den letzten Jahren haben die Verweise auf den Radikalen Konstruktivismus in der pädagogischen Literatur auf erstaunliche Weise zugenommen. Mir ist das eher unbehaglich. Wenn Forschungsprogramme und Schulen verkünden, dass sie das >>konstruktivistische Paradigma<< übernommen haben, dann fangen ganz unschuldige Leute an zu glauben, dass die konstruktivistische

Neuorientierung die Erziehung und die Schule aus ihrer >>Krise<< befreien wird, was immer auch ihr Grund sein mag. Das ist natürlich Unsinn und aus meiner Sicht kontraproduktiv.“

([47], S. 283)

Ein ebenfalls durchaus übliches Verhalten vom System Schule ist es, alte Konzepte in neue Theorien einzubetten. Die Theorien sind dann kein Werkzeug des Lehrers, um Themenkomplexe für Schüler adäquat unter Berücksichtigung ihrer Erfahrungen aufzuarbeiten, sondern ein Mittel, um althergebrachtes zu rechtfertigen. Im Sinne dieser Arbeit sollen es die Theorien dem Lehrer jedoch lediglich ermöglichen, eine Vorstellung oder ein Modell von dem zu erhalten, was und wie seine Schüler lernen. Glasersfeld schreibt hierzu:

„Begriffe müssen von jedem Lerner für sich aufgebaut werden, doch ist es Aufgabe der Lehrer, die Konstruktionsprozesse ihrer Schüler zu orientieren. Es ist natürlich leichter, Schüler auf einen bestimmten Bereich der begrifflichen Konstruktion hinzulenken, wenn man eine gewisse Vorstellung von den begrifflichen Strukturen hat, mit denen sie gerade arbeiten. Mit anderen Worten, um das Denken der Schüler zu verändern, braucht der Lehrer ein Modell ihres Denkens. Da man nicht in die Köpfe der Mitmenschen hineinschauen kann, bleiben solche Modelle immer hypothetisch.“

(Glasersfeld, Steffe 1991, entnommen [47], S. 300)

Dabei können sowohl geschickte Instruktion, offene Aufgabenstellungen oder auch hinreichende Realitätsorientierung zur Vermittlung geeignet sein. Lernen ist ein Prozess, der unter anderem abhängig ist vom behandelten Themenkomplex, der Lernendengruppe und auch dem Lehrenden. So sind Gruppenarbeitsphasen in nicht disziplinierbaren Klassen unangebracht, konstruktivistische Ansätze fehl am Platz bei der Behandlung des Satzes von Abel in der Jahrgangsstufe 11 und auch der Rechnereinsatz kann an einigen Stellen des Unterrichts störend wirken. Lehrer arbeiten in der Schulrealität und haben oft nur geringen Nutzen von strikt theorieorientierten Lehrgängen. Das eigentliche Lehren scheint nur in Ansätzen erlernbar und auch das Verstehen einer Theorie des Verstehens bedingt nicht die Fähigkeit, diese Theorie adäquat umsetzen zu können.

„Zusammenfassend möchte ich sagen, dass der Radikale Konstruktivismus den Erziehern folgendes nahe legen kann: Die Kunst des Lehrens hat wenig mit der Übertragung von Wissen zu tun, ihr grundlegendes Ziel muss darin bestehen, die Kunst des Lernens auszubilden.“

([47], S. 309)

Die Untermalung des Lehrens und Lernens mit dem Begriff der Kunst deutet auf Fähigkeiten, welche nicht unmittelbar erlernbar scheinen. Sonst wäre an dieser Stelle der Begriff Handwerk passender. So scheint Glasersfeld am Ende seines Werks zum Radikalen Konstruktivismus lediglich Kritik daran zu äußern, dass bei der Modellierung von Lernprozessen nicht ausschließlich instruktionale Aspekte Berücksichtigung finden sollten, sondern auch andere Fähigkeiten, nennen wir sie Schlüsselqualifikationen, gefördert werden sollten. Dies liefert der Lehrkraft jedoch noch keinen Anhaltspunkt, wie die Division von Brüchen nicht instruktional gelehrt werden kann. Es bleibt festzuhalten:

Die Geschichte der Lerntheorien zeigt, dass stets Wege gesucht wurden, Lernprozesse zu verstehen und durch ihre Kenntnis Vorgänge zu optimieren. Dabei wurden sowohl Qualität und Prüfbarkeit von Lernzielen, als auch das, was unter einem optimalen

Lernprozess verstanden werden soll, stetig revidiert und neu konzipiert. Schulisches Lernen ist vielen Sachzwängen ausgesetzt. Hierzu gehört die Notwendigkeit der Notengebung, der 45-Minuten Takt aber auch die Kompatibilität des Gelernten zum schulischen Umfeld, um nur einige dieser Zwänge zu nennen. Konzepte, die akut verändern wollen, müssen entweder hinreichend adaptiv sein oder organisatorische Aspekte in geeignetem Maß berücksichtigen. Das Verhältnis von Instruktion und Konstruktion muss nicht zuletzt aus diesem Grund so angelegt werden, dass Schülern in ihrem Umfeld die Möglichkeit gegeben wird, möglichst optimale Bedingungen zum Erlernen bestimmter Inhalte oder Fertigkeiten vorzufinden. Das gesuchte Optimum hängt stark vom jeweiligen Themenkomplex, aber auch von der Lerngruppe oder dem Lehrer, ab. Um sich einem Optimum zu nähern, bedarf es stets der Diskussion und Prüfung neuer Konzepte in schulischen Kontexten.

2.2 Brüche

Die Frage, wie viel Bruchrechnung der Mensch überhaupt braucht, scheint durchaus berechtigt. Jeder, der die Uhr lesen kann, Kochbücher studiert oder mit Geld umgeht wird, zumindest umgangssprachlich, einige Brüche kennen. Die Bruchrechnung selbst scheint jedoch nur für wenige mündige Erwachsene relevant (vgl. [129]). Heymann schlug wohl nicht zuletzt aus diesem Grund vor, Drillthemen im Unterricht nicht mehr den Stellenwert zuzuschreiben, den sie zur Zeit innehaben. Hierzu zählt er offensichtlich auch Teile der Bruchrechnung (vgl. [73], S. 243). Gleichzeitig fordert er die Verstärkung von Stochastik und angewandter Statistik. Nach Padberg ist dies jedoch ein Widerspruch:

„Allein schon für diesen kleinen Teilausschnitt¹¹ aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigen wir fundierte Kenntnis des Bruchbegriffs, sowie der Addition und Multiplikation von Brüchen.“

([129], S. 9)

Lediglich ein fundiertes Verständnis des Bruchbegriffs scheint somit nach Padberg nicht ausreichend, um gewisse Teilgebiete der Statistik verstehen zu können. Gerade sie drängt jedoch immer stärker in unser tägliches Leben. Nicht zuletzt dieser Umstand räumte derartigen Themengebieten einen größeren Platz in der Oberstufe ein (vgl. [125]). **Ob das Rechnen mit Brüchen aus diesem Grund gelernt und geübt werden sollte, wird in dieser Arbeit nicht thematisiert.** Fakt ist, dass die Bruchrechnung fest in die Lehrpläne des Mathematikunterrichts integriert ist und voraussichtlich auch in absehbarer Zeit nicht aus ihnen verschwindet. Unsere Schüler müssen also, neben dem Umgang mit Brüchen und Bruchzahlen, auch das Bruchrechnen erlernen. Die langfristige und sichere Verankerung der Bruchrechnung ist stark an das Verständnis des Bruchbegriffs gekoppelt (vgl. u.a. [59]). Kindern und Jugendlichen die Inhalte der Bruchrechnung zu vermitteln, ist nach Ansicht der Gesellschaft die Aufgabe der Schule. Von einem gelungenen Ansatz, dies zu realisieren, kann bis dato jedoch noch nicht gesprochen werden.

¹¹ gemeint ist ein einführendes Beispiel zu Kombinatorik.

2.2.1 Bruchrechnen in der Schule

„Wenn man also das Ziel hat, Mathematik (und nicht Rechnen) zu unterrichten, kommt man um die Bruchrechnung nicht herum.“

([58])

Ziel dieses Abschnitts soll es nicht sein, die inhaltliche Dimension der Bruchrechnung möglichst umfassend darzustellen. Hierzu sei auf die entsprechenden Schulbücher verwiesen (siehe jedoch auch [130]). Vielmehr soll geklärt werden, welche Methoden der Wissensvermittlung zugrunde liegen. Trotzdem vorab einige allgemeine Anmerkungen.

Bruchrechnung ist im Unterricht der Mittelstufe angesiedelt. Vor allem die sechste Klasse, in NRW ist dies das zweite Jahr der Orientierungsstufe, ist stark durch sie geprägt (siehe u.a. [138]; oder als älteres Werk [105]; vgl. jedoch auch [122]; [177], S. 138¹²). Gelehrt wird Bruchrechnung meist in systematischer Weise. Gerade Einführungen sind bzw. sollten dabei oft von enaktiven Phasen geprägt sein (vgl. [86], S. 36) und Schüler zum Handeln anleiten¹³. Auch ikonische Formen der Wissensdarstellung werden zur Einführung des Bruchzahlbegriffs oder der Regeln der Bruchrechnung herangezogen (vgl. hierzu u.a. [174] und [177]). Häufig zerfallen die anschaulichen Darstellungen, welche für Schüler meist einsichtig sind, jedoch schnell zu bloßen Regeln. Freudenthal beschreibt diesen Umstand wie folgt:

„Dass das Bruchrechnen ein großer didaktischer Misserfolg ist, kann kaum bezweifelt werden. Ich bin davon überzeugt, dass es das bleibt, solange man es in seinem bisherigen Kontext, nämlich dem des Rechnens belässt. Kinder können mit anschaulichen Brüchen anschaulich rechnen. Die übliche anschauliche Einleitung zum Bruchrechnen funktioniert darum wie geschmiert, schnell schreitet der Lehrer zum algorithmischen Rechnen fort, zur unvermeidlichen Katastrophe. Mit Hängen und Würgen lernen die Kinder die Regeln des Kürzens und der vier Grundrechenarten, um sie beliebig durcheinanderzuwerfen und abzuändern. Es sind doch eben nur sinnlose Spielregeln.“

([42], S. 248)

Nach einer anschaulichen Herleitung wird letztendlich das allgemeingültige Ergebnis (z.B. eine Regel) präsentiert. Schüler, welche erst kurz an meinen Unterricht teilnahmen, forderten mir gegenüber derartige Vorgehensweisen sogar durch Fragen wie: „Wie soll man das ohne Formel lösen?“ oder Feststellungen wie „Da haben wir noch keine Formel zu!“ ein (siehe auch [176], S. 106f; Wittmann beschreibt hier den Umstand und die damit verbundenen Konflikte, dass Schüler mechanisch lernen wollen, der Lehrer jedoch Einsicht vermitteln möchte). Ob jedoch der Verzicht auf konkrete Regeln bei schwachen Schülern, wie es u.a. von Zech angedeutet wird (vgl. [177], S. 163), zur wahren Einsicht führt und notwendige Grundlagen schafft, halte ich ebenfalls für zweifelhaft. Dass Schüler eine Vorstellung von Unterricht entwickeln, die letztendlich impliziert, dass der Prozess, also das Entstehen von Begriffen im Unterricht nur Zeitverschwendung ist, scheint keinesfalls tragbar. So ist gerade in der Bruchrechnung die Gefahr groß, didaktisch geschickte enaktiv und ikonisch geprägte Einführungen durch Regeln

¹² Hier wird auch angeführt, dass Bruchrechnen etwa 27 Wochen unterrichtet wird.

¹³ Dass Handlungsorientierung auch ein Thema für den Mathematikunterricht und die Bruchrechnung ist, zeigen u.a. [58] oder [131].

zu ersetzen¹⁴ (siehe auch [177], S. 140). Scheinbarer Vorteil ist, dass die Schüler schnell beginnen können zu rechnen (vgl. [176], S. 106). Dieser Vorteil wiegt jedoch den Nachteil nicht auf, dass Schüler inhaltlich nichts verstehen müssen (vgl. [101], S. 152; [176], S. 107). Der Verzicht auf einsichtvolles Lernen ist unhaltbar und widerspricht der Natur von Mathematik und somit auch der eines adäquaten Mathematikunterrichts. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von instrumentellem Verstehen (vgl. [57], S. 75). Dies ist insofern beachtenswert, da das betrachtete Programm zum Bruchrechnen zwar zum Teil tutoriellen Charakter hat, jedoch auch viele Practice&Drill-Elemente enthält. Ich weise aus diesem Grund bereits an dieser Stelle darauf hin, dass das gänzliche Beschränken des Lernprozesses auf Rechnerunterstützung, unter Berücksichtigung des Standes mathematikdidaktischer Forschung und des technischen Stands geeigneter Programme **zur Zeit nicht sinnvoll erscheint** (vgl. u.a. [25], S. 63). Vielmehr muss auch in der Schule ein Sensibilisierungsprozess angeregt werden, welcher bereits zu Beginn die neuen Medien berücksichtigt und sowohl Eltern als auch Schülern Transparenz bietet. Zur Wiederholung und häuslichen Nacharbeit können diese Programme gute Dienste leisten. Diese Transparenz ist aus meiner Sicht im derzeitigen Bruchrechnenunterricht noch nicht gegeben. Wird ein solcher Prozess nicht eingeleitet, besteht die Gefahr, dass Eltern eigenständig und zum Teil unüberlegt für ihre Kinder nicht geeignete Software verfrüht einsetzen. Die frühen Phasen des Bruchrechnenunterrichts, welche gerade enaktive bzw. ikonische Elemente enthalten, erscheinen vor dem Hintergrund der Regeln, welche in vielen Programmen lediglich vorgestellt werden, leer.

Abschließend soll nun stellvertretend für alle Rechenoperationen eine mögliche schulische Einführung der Addition von Brüchen umschrieben werden. Da Brüche vor allem zu Beginn der Bruchrechnung meist durch konkrete Größen repräsentiert werden, ist es naheliegend, dieses Vorgehen auf die Addition von Brüchen zu erweitern (vgl. [177], S. 143). Schulbücher gehen häufig ähnlich vor (siehe u.a. [104], S. 70).

Aufgabe zur Einführung der Addition von Brüchen:

Petra und Knut sind Gäste in einer Pizzeria. Von der Pizza, welche in acht gleich große Teile geschnitten wurde, hatte Petra bereits 2 und Knut 3 Stücke zu sich genommen. Welchen Bruchteil der Pizza haben beide zusammen gegessen? Betrachte auch untenstehende Zeichnung:

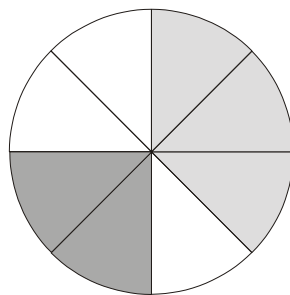


Abbildung 5, Abbildung zur Addition von Brüchen

Die Aufgabe eröffnet dem Unterrichtenden vielfältige methodische Zugänge. Sowohl der Rückgriff auf die enaktive Ebene, als auch das Operieren auf der ikonischen Ebene scheinen geeignet, günstige kognitive Strukturen zu prägen. Auf welcher Stufe der Formalisierung der Lehrer einsteigt, hängt dabei sicher nicht zuletzt von der Lerngruppe ab. Ebenfalls kann die

¹⁴ An dieser Stelle sei wirklich das Ersetzen gemeint.

Betonung des quasikardinalen Aspekts der Erarbeitung dienen (vgl. u.a. [177], S. 164). Die Addition gleichnamiger Brüche kann so erklärt werden. Die Addition ungleichnamiger Brüche kann ebenfalls auf ikonischer Ebene erarbeitet werden. Hier wird oft mit Rechtecken als Repräsentanten gearbeitet. Beispiele hierzu finden sich u.a. in [177], aber auch in [128]. Zum Einüben sollten Anwendungsaufgaben im Vordergrund stehen. Schüler erhalten so Gelegenheit, die Plausibilität ihrer Ergebnisse abzuschätzen. Werden zum technischen Üben der Addition reine Zahlenaufgaben herangezogen, sollte es Aufgabe des Lehrers sein, diese Phasen gelegentlich zu unterbrechen, den Schüler auf dessen Verständnis hin zu befragen und sich ggf. nochmals von der formalen Ebene zu lösen.

2.2.2 Systematische Schülerfehler

Die Wichtigkeit des Bruchzahlverständnisses für das Verständnis der Bruchrechnung wurde bereits erwähnt. Untersuchungen hierzu finden sich unter anderem in [21]; [61]; [121] oder auch [128]. Die möglichst vollständige Beschreibung typischer Schülerfehler soll an dieser Stelle nicht erfolgen. Verwiesen sei lediglich auf einige der zahlreichen empirischen Arbeiten hierzu (vgl. u.a. [35]; [46]; [54]; [56]; [66]; [109]; [128]; [135]; [165]). Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien werden in [66] analysiert. Die meisten Fehlerbeispiele lassen sich auf die durchgängige falsche Anwendung nicht verstandener Regeln (systematische Schülerfehler, Definition von Fehlertypen siehe [128], S. 90; aber auch [177], S. 137) zurückführen. Charakteristisch für das Rechnen mit Brüchen ist dabei der Fehler, dass Schüler Brüche addieren, indem sie Zähler und Nenner jeweils separat zusammenzählen und hieraus anschließend einen neuen Bruch bilden. Hintergründe für dieses Verhalten können separierte Begriffe in den Köpfen der Schüler sein. Hasemann beschreibt z.B. einen Fall, in welchem der Schüler zwar Additionsaufgaben reiner Zahlennatur richtig löst, in anderen Kontexten jedoch den Standardfehler begeht (vgl., auch für weitere Beispiele, [57], S. 123f). In einem Interview stellte sich heraus, dass der Schüler wirklich der Meinung war, dass zwei verschiedene Verfahren existieren. In der zweiten Situation hat er die Fehlerstrategie zur Bearbeitung gewählt, da diese schneller durchzuführen war. Aber auch andere Strategien führen zu fehlerhaften Lösungen. Das Bedürfnis von Schülern beim Rechnen Formeln zu verwenden, scheint in nicht geringem Umfang vorhanden zu sein. Schüler werden u.a. durch „Rechenpäckchen“ verstärkt dazu genötigt, Mechanismen zur schnellen Bewältigung von Aufgaben zu entwickeln. Genau diesen Mechanismen, die letztlich auch Fehlerstrategien begünstigen können, kann durch den stetigen Rückgriff auf Verständnisfragen entgegengewirkt werden (vgl. u.a. [141], S. 17; [178], S. 210).

Abschließen möchte ich diesen Abschnitt mit einem von Henneke erstellten Rechengraphen (vgl. [63]). Er zeigt auf, welche immense Komplexität bei empirisch ermittelten Schülerlösungen auftauchen kann. Die folgende Abbildung leitet also bereits auf Gegenmaßnahmen zur Behebung von Schülerdefiziten, welche mit deren Diagnose beginnt. In der Mitte des Diagramms ist die eigentliche Aufgabe abgebildet. Die von der Aufgabe wegweisenden Pfeile zeigen auf empirisch ermittelte Schülerfehler. Die Beschriftung der Pfeile gibt an, bei wie vielen Schülern dieser Weg beim Lösen der Aufgabe beobachtet werden konnte.

Rechnung Schüler 3:

$$\frac{6}{3} - \frac{5}{2} = 2 - 2\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

Die vorab diagnostizierte Fehlerstrategie trifft auf Schüler 1 zu. Er subtrahiert konsequent Zähler und Nenner jeweils separat. Schüler zwei geht offensichtlich anders vor. Mögliche Ursache für seinen ersten Schritt ist die fehlerhafte Übertragung der Regel zur Division von Brüchen auf die der Subtraktion. So bildet er den Kehrwert des zweiten Bruchs und ersetzt die Rechenoperation durch deren Inverse. In einem nächsten Schritt wendet er die Hauptfehlerstrategie der Addition von Brüchen an und addiert Zähler und Nenner jeweils separat. Das Ergebnis dieser fehlerhaften Rechnung kürzt er korrekt und erhält ebenfalls als Ergebnis 1. Schüler 2 wendet somit möglicherweise zwei Fehlerstrategien konsequent systematisch an. Dass es Schüler gibt, welche dies tun, zeigt die Analyse der Korrelationen einiger Fehleritems aus der Untersuchung von Herden und Pallack aus dem Jahr 1999 (vgl. [66]). Berücksichtigt wurden im Folgenden drei Aufgaben, welche mit der Hauptfehlerstrategie der Addition bearbeitet wurden und zwei Aufgaben zur Subtraktion, bei welchen die Divisionsregel fehlerhaft auf die Subtraktion angewandt wurde.

Näherungsmatrix

	Korrelation zwischen				
	Nenner und Zähler separat addiert (9a)	Nenner und Zähler separat addiert (9b)	Nenner und Zähler separat addiert (9c)	Aufgabe 11b falsch, Str: Divisionsregel auf "-" mit "+" angewandt	Aufgabe 11c falsch Str: Divisionsregel auf "-" mit "+" angewandt
Nenner und Zähler separat addiert (9a)		,831	,874	,178	,178
Nenner und Zähler separat addiert (9b)	,831		,953	,194	,194
Nenner und Zähler separat addiert (9c)	,874	,953		,204	,204
Aufgabe 11b falsch, Str: Divisionsregel auf "-" mit "+" angewandt	,178	,194	,204		1,000
Aufgabe 11c falsch Str: Divisionsregel auf "-" mit "+" angewandt	,178	,194	,204	1,000	

Dies ist eine Ähnlichkeitsmatrix

Tabelle 2, Korrelationsmatrix Divisionsregel auf Subtraktion und Hauptfehlerstrategie Addition

Die entscheidenden Korrelationen sind jeweils nur gering, aber positiv. Die jeweiligen Eigenschaften wurden mit den Zahlen 0 und 1 nominal skaliert ($0 \triangleq$ Proband erfüllt die Eigenschaft nicht; 1 wird durch das Komplement festgelegt). Die hier zugrunde gelegte Pearson Korrelation ist dann identisch mit dem Phi-Koeffizienten von Kendall und Stuart. Aufgrund einer vorgegebenen Vier-Felder-Tafel ergibt sich dieser wie folgt:

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

Da a, b, c und d natürliche Zahlen sind folgt aus $\varphi > 0$ unmittelbar, dass weder $a=0$ noch $d=0$ gilt. Dies bedeutet aber, dass es Schüler gibt, die die Fehlerstrategien gleichzeitig anwandten. Die vorgestellte Lösung wäre also beobachtbar¹⁵. Aus der Sicht des Lehrers muss sie deswegen Beachtung finden.

Schüler 3 geht geschickter vor. Er erkennt zunächst, dass sich die Brüche kürzen, bzw. in gemischte Zahlen umformen lassen. Dann allerdings kürzt er den ganzzahligen Anteil mit dem Nenner. Dies entspräche der Fehlvorstellung, dass der ganzzahlige Anteil mit dem Zähler multipliziert werden muss, also ein zusätzliches Multiplikationszeichen einzufügen ist. Dieser Fehler fällt jedoch empirisch kaum ins Gewicht und wird nur selten beobachtet (vgl. [128]; [63]).

Trotzdem illustriert dieses Beispiel, was letztendlich auch dessen Ziel war, dass die eindeutige Diagnose kein triviales Unterfangen ist. Pauschale Analysen scheinen nicht geeignet, um Schüler adäquat zu beraten und ihnen zu helfen, ihre Defizite zu beseitigen. Im Unterricht muss aus diesem Grund das Gespräch mit dem Schüler im Vordergrund stehen. Hierfür müssen jedoch erst die notwendigen Freiräume geschaffen werden.

2.2.4 Diagnosewerkzeug Computer

Die zuvor aufgezeigte mögliche Komplexität von Analysen und die Betonung der Wichtigkeit des Gesprächs scheinen auf den ersten Blick den Eigenschaften von rechnergestützten Analysen zu widersprechen. Nicht ausreichend sind sicher Programme, welche Implementierungen von Automaten des folgenden Typs darstellen:

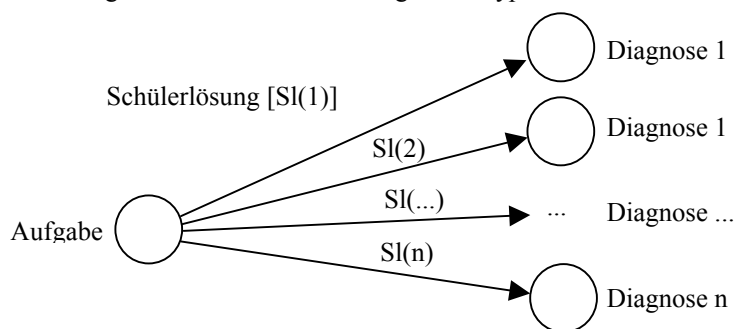


Abbildung 7, einfacher Analyseautomat

Das Programm erkennt eine endliche Zahl von Schülerlösungen und stellt auf dieser Grundlage entsprechende Diagnosen. Dies entspricht dem Vorgehen der meisten Programme zur Bruchrechnung für den Heimbereich (vgl. [67]). Diagnostiziert ein solches Programm einen nicht vom Schüler verfolgten Fehler, kann es bei diesem zu kognitiven Konflikten kommen. Zum einen erkennt der Schüler seinen Fehler nicht (sonst würde er ihn ja nicht begehen), zum anderen ist er zusätzlich gezwungen, sich in andere Fehlerstrategien einzudenken, welche vielleicht noch nicht einmal angedacht wurden. Im schlimmsten Fall könnte der Schüler unbewusst die neue Fehlerstrategie übernehmen.

Offenere Systeme lassen sich erzeugen, wenn man versucht, Mengen möglicher Schülerlösungen zu generieren, die allerdings bereits bei einzelnen Aufgaben leicht in die Milliarden wachsen können (vgl. [63], S. 113), so dass die Effizienz derselben abgeschätzt werden muss. Dies bedeutet, dass zu einer möglichen Schülerlösung faktisch mehrere Rechenwege zur Verfügung stehen, welche dem Ergebnis zugrundeliegen können. Um nicht

¹⁵ Sie ist somit mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit bei Schülern beobachtbar.

praxisrelevante Schülerlösungen, welche zwar durchaus denkbar sind, unberücksichtigt zu lassen, muss einem solchen Diagnosesystem hinreichende Empirie zugrunde liegen. Denkbar ist dann folgendes Vorgehen:

- 1) Der Schüler bekommt eine Aufgabe gestellt und beantwortet diese fehlerhaft. Hieraus resultiert eine bestimmte Menge an Vorgehensweisen v_1, \dots, v_n . Jeder dieser Vorgehensweisen liegen aufgrund empirischer Erfahrungen bestimmte Wahrscheinlichkeiten ($P(v_i) < 1$) zugrunde. In den Vorgehensweisen sind jeweils bestimmte Fehlerstrategien enthalten.
- 2) Untersucht werden soll nun, ob der Schüler wirklich bestimmte Fehlerstrategien s_1, s_2, \dots verfolgte. Suche somit v_i mit $P(v_i)$ maximal. Bestimme im Folgenden die Fehlerstrategien aus v_i . v_i beinhaltet mindestens eine der zu diagnostizierenden Fehlerstrategien s_1, s_2, \dots .
- 3) Generiere entsprechende Aufgaben, welche die systematischen Fehlerstrategien s_1, s_2, \dots möglichst eindeutig diagnostizieren.
- 4) Zu durchlaufen sind nun wiederholt die Schritte 2 bis 3. Die Wahrscheinlichkeit, die zutreffenden Fehlerstrategien gefunden zu haben, wächst entsprechend. Das Programm sucht stets geeignetere Aufgaben zur Diagnose spezieller Fehler. Die endgültige Diagnose wird so ständig hinterfragt.

Völlige Gewissheit gibt es dabei nur selten oder nicht. Der User müsste eine entsprechende Treffwahrscheinlichkeit $p \leq 1$ zur Diagnose wählen. Erst wenn diese Diagnosewahrscheinlichkeit erreicht ist, sollte die Diagnose dem Schüler mitgeteilt werden.

Bis zur Serienreife eines Programms, welches annäherungsweise eine solche Diagnose zu leisten vermag, werden sicher noch einige Jahre vergehen. Wesentliche theoretische Grundlagen zur Entwicklung dieser Programme lieferte Henneke durch seine 1999 erschienene Dissertation (vgl. [63]). Marktwirtschaftlich wären hohe Investitionen in derartige Algorithmen wahrscheinlich nicht vertretbar, da ansprechende Multimediaelemente, wie zum Beispiel im Programm Addy (vgl. [67]), den Absatz von Programmen wahrscheinlich signifikanter erhöhen als die inneren Qualitäten von Produkten. Des Weiteren werden Eltern die Qualität der Diagnosen meist nicht abschätzen können. Nicht zuletzt dies führt dazu, dass sogar Programme, welche falsche Diagnosen erstellen, also noch nicht einmal dem ersten hier vorgestellten Automaten gerecht werden, sich etablieren konnten (vgl. [67]). Dieser Zustand ist faktisch nicht vertretbar und bedarf dringender Korrektur. Bis diese Korrektur einsetzt, verbleibt nur der gezielte, reflektierte und sinnvolle Einsatz von vorhandenen Programme oder der Verzicht auf entsprechende elektronische Hilfsmittel.

Rechnereinsatz in der Schule, Einblicke in die Praxis

3 Rechnereinsatz in der Schule, Einblicke in die Praxis



Abbildung 8, Schüler am PC, Quelle: Foto von Pallack, A.

„Wer im Unterricht keinen Computer einsetzt ist noch lange kein pädagogischer Neandertaler!“

„Wer einen Computer in sein Klassenzimmer stellt, ist deshalb noch lange kein moderner Pestalozzi“

(entnommen [83], S. 37)

Es kommt immer noch auf die Konzeption an. Doch auch das heute vorhandene methodische und inhaltliche Repertoire¹⁶ entwickelte sich nicht unmittelbar nach Erscheinen der ersten Computer.

Im Folgenden soll ein Einblick in die Entwicklung der Beziehung von Unterricht und Computer gegeben werden. Primär wird dabei der Wandel umrissen und aufgezeigt, wie und mit welchen Konsequenzen die elektronischen Medien in den Unterricht der verschiedenen Jahrgangsstufen integriert wurden und werden. Hierzu wird vorab ein Einblick in die Entwicklung von Computern und deren zunehmende schulische und gesellschaftliche Relevanz geboten. Alle Jahrgangsstufen und Schulformen werden dabei berücksichtigt (Grundschule, Hauptschule, Realschule, Gesamtschule und Gymnasium). Dies ist zum einen für einen Überblick wichtig, da die sechste Klasse noch nah am Bereich der Grundschule liegt und von daher Vorerfahrungen mit dem Rechner berücksichtigt werden müssen. Zum anderen werden bereits Brücken in die Mittel- und sogar Oberstufen gebaut ([129]). Einige, vor allem im Bereich des Gymnasiums, weit verbreitete Programme werden vorgestellt und über deren Integration in den Unterricht berichtet. Im ersten Schritt wird der Schwerpunkt auf Software gelegt, die als Werkzeug in den Unterricht integriert werden kann. Im Anschluss an diesen Überblick wird der mögliche Einsatz des verwandten Programms abgesteckt und abgewogen, wo es im Rahmen der Bruchrechnung zum Einsatz kommen könnte. Abgeschlossen wird

¹⁶ Angeführt seien exemplarisch [38] für Geometriesoftware und [140] für Computereinsatz im Mathematikunterricht im Allgemeinen.

dieses Kapitel dann mit einem Ausblick in die Zukunft des Lernens. Dargestellt werden die Möglichkeiten der weltweiten Vernetzung und deren mögliche zukünftige Funktion beim Lernen. Ebenfalls beleuchtet werden die Möglichkeiten in und mit dem Internet Mathematik und vor allem Bruchrechnung zu lernen.

3.1 Jugendliche und Computer – Wie alles begann

Wann der erste Rechner im Unterricht eingesetzt wurde, ist nicht exakt zu datieren. Um Missverständnissen vorzubeugen sei vorab erwähnt, dass ich mich in den folgenden Ausführungen darauf beschränke, lediglich elektronisch arbeitende Rechenmaschinen zu betrachten, welche in den 40er Jahren erstmals aufkamen ([44], S. 24) und deren Funktionalität ab 1948 durch die Erfindung des Transistors (vgl. [44], S. 24) immens verbessert wurde¹⁷. Computer der ersten Generation (ohne Transistorbestückung) sind die von Konrad Zuse entwickelten Z1 und Z2. Zuse entwickelte schließlich auch den ersten frei programmierbaren Computer der Welt, den Z3, welchen er 1941 vorstellte (vgl. [1]). Mechanische Lernmaschinen, wie sie in den sechziger Jahren in den USA entstanden (vgl. [49], S. 23), bleiben unberücksichtigt.

Elektronische Lernmaschinen, deren Software wohl am ehesten mit Practice&Drill-Programmen verglichen werden konnte, entstanden bereits in den siebziger Jahren (vgl. [49], S. 23). Meist wurden sie in kleinen Auflagen hergestellt und erreichten so nur wenige Schüler. Computer konnten bevorzugt in großen Betrieben oder im militärischen Bereich gefunden werden. Die Speicherung von Daten wurde u.a. auf Lochkarten vorgenommen. Abbildung 9 zeigt ein solches System (IBM 1130 mit Recheneinheit 1131, Multiplexer 1133 mit zwei Diskettenlaufwerken und dem Kartenlesestanzer 1442 (Quelle: [4])).

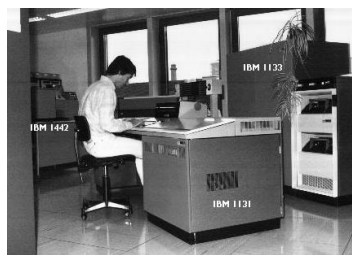


Abbildung 9, Lochkartensystem, Quelle: [4]

Die Systeme waren kompliziert und ihre Bedienung nicht intuitiv erlernbar. Ein schulischer Einsatz schien sowohl aus Gründen zeitlicher als auch lernzielorientierter Ökonomie nicht sinnvoll. Die Zahl der Nutzer und die damit verbundene Relevanz für das Berufsleben stieg nach der Einführung des Personal-Computers (PC) 1979 sprunghaft an (vgl. [44], S. 168). Doch auch diese Entwicklung prägte das schulische Umfeld nicht bedeutend. Vielmehr war es der steigende Absatz von Heimcomputern, welcher die Computerfirmen in Zugzwang versetzte, sich mit dem Markt Schule näher zu beschäftigen (vgl. [49], S. 6). Computer waren keine Werkzeuge mehr für große Betriebe, sondern vielmehr Geräte, die auch im Heimbereich vertreten waren und hier von Kindern und Jugendlichen bedient wurden, die mit ihnen spielten, arbeiteten oder programmierten. Letztendlich wird es die Verknüpfung von gesellschaftlicher Relevanz und Alltäglichkeit gewesen sein, die die Integration des Rechners in Schulen

¹⁷ 1954 wurde in den Bell Labs das erste Versuchsmodell eines Elektronenrechners mit vollständiger Transistorbestückung hergestellt (vgl. [40], S. 28)

vorantrieb. Es scheint somit durchaus legitim die Aussage zu formulieren, dass Schule durch den Boom der Heimcomputer gezwungen wurde, ihr Angebot zu erweitern. Die Ausstattung der damaligen Geräte scheint im Vergleich zu heute relativ klein. Zur damaligen Zeit waren die meisten Heimcomputer weder mit Festplatten, noch mit Diskettenlaufwerken ausgestattet. Bevorzugt wurden Geräte der Firma Commodore eingesetzt, die im Folgenden, repräsentativ für den damaligen Entwicklungsstand, näher beschrieben werden¹⁸. Commodore Computer wurden sowohl im Unterricht eingesetzt (vgl. [115], S. 277), waren aber auch in Privathaushalten häufig zu finden und wurden dort verschiedenartig genutzt (vgl. [115], S. 285). Diese Geräte waren offensichtlich noch zu Beginn der neunziger Jahre in Schulen weit verbreitet. Sowohl der C64 (Commodore 64; Hauptspeicher 64kByte, Erscheinungsjahr 1982) als auch sein Vorgänger VIC20 (auch „Volkscomputer“ genannt weil er in Deutschland als VC20 verkauft wurde; Hauptspeicher 5kByte, Erscheinungsjahr 1981) kamen mit einer Datasette (modifizierter Kassettenrekorder) auf den Markt¹⁹. Die Vorgänger dieser beiden Rechner, unter anderem der PET, den Commodore 1977 mit Monitor und Datasette auf den Markt brachte, boten Komplettlösungen in einem kompakten Gehäuse.

Schon eine knappe Übersicht der wichtigsten technischen Daten macht deutlich: Commodore PET 3001 bietet ein Preis-Leistungs-Verhältnis, wie man es noch vor kurzem für undenkbar hielt. Grund hierfür ist die bahnbrechende Mikro-Processor-Technik von Commodore und natürlich die betont servicefreundlichen Steckmodule. Mitgeliefert wird ein Bedienungshandbuch mit ausführlicher Programmieranleitung. Eine Lernkassette für die Computersprache Basic ist ebenfalls erhältlich. Service! Speziell für PET 3001 steht ein Händler- und ServiceNetz bereit. Ein PET-Anwender-Club ist schon gegründet.

Leistungsdaten (Kurzfassung):
Arbeitsspeicher von 8 kByte bis zu 32 kByte zu erweitern. Insgesamt 312 Zeichen, 23 cm Bildschirm. Interface-Anschluß bis zu 15 Buskompatibler Geräte (IEC-Bus). Festwertspeicher mit 8 kByte Basic, 4 kByte Betriebssystem, 1 kByte Testroutine. Zubehör: 2. Kassette (Drucker 80 Zeichen breit, Floppy-Disk und Modem in Vorbereitung). 9 Standard- und 12 erweiterte Basic-Anweisungen. 12 math. Funktionen. 8 String (Zeichenketten)-Funktionen. 6 System-, 3 Formatierungs- und 4 Maschinensprache-Anweisungen. 3 logische Operatoren. 9 INPUT/OUTPUT-Anweisungen. Einfache-, Ganzzahl- und String-Variable u. v. m. Gewicht ca. 20 kg. 220 Volt. Maße: 42 x 47 x 36 cm.

commodore
Commodore GmbH · Frankfurter Str. 171-175
60078 Neu-Isenburg · Tel.: (06102) 8003 · Telex: 4185663 com d

Info- und Bestell-Coupon
☐ Ich möchte zunächst ausführliches Informationsmaterial haben, sowie Bezugsquellen nachweisen.
☐ Ich bestelle 1 Stck. Commodore PET 3001 zum Preis von DM 2.900,- (inkl. MwSt.) - Verrechnungsscheck ist beigestellt -
☐ Ich bin außerdem an der Mitgliedschaft im PET-Anwender-Club interessiert (Bitte ankreuzen - Einsenden an Commodore)

Name: _____
Anschrift: _____
Unterschrift: (nur bei Bestellung) _____

Abbildung 10, Werbung für den 1977 erschienen PET 3, Quelle: [1]



Abbildung 11, Der 1982 erschienene C64, Quelle: [1]

Für den VC20, den C64 und die meisten anderen Heimcomputer diente der Fernseher als Ausgabegerät (vgl. [1]). Die Betriebssysteme waren fest auf einem Chip integriert und konnten i.A. nicht ausgetauscht oder erneuert werden. Trotzdem wurde der C64 breit vermarktet. Bis heute wurden insgesamt 17.000.000 Geräte verkauft, 1984 waren es weltweit bereits 4.000.000, in Deutschland 1.000.000. Fast jeder Schüler (mich eingeschlossen) in Deutschland hatte eines dieser Geräte oder zumindest die Möglichkeit, auf einen solchen zuzugreifen. Gerade zu Beginn dieser Entwicklung war nur wenig geeignete Software vorhanden und größtenteils für Jugendliche nicht oder nur selten erschwinglich. Es entstand die Notwendigkeit, Programme entweder selbst zu schreiben oder Quellcodes aus Computerzeitschriften abzutippen. Um mit dem System arbeiten zu können, mussten die Kinder und Jugendlichen zumindest die Grundlagen der Programmiersprache lernen, um

¹⁸ Da der Breite der Entwicklung an dieser Stelle keine Rechnung getragen werden kann, möchte ich Interessierten die Website <http://museum.ruhr.de> empfehlen ([1]). Die Geschichte der Heimcomputer und Videospiele wird hier sehr umfassend und, nach meinem Ermessen, gut aufbereitet dargestellt.

¹⁹ Ein weitere Vertreter dieser Spezies war der CPC464 von Schneider. Er kam 1985 mit einer integrierten Datasette, 64kByte Hauptspeicher und Grünmonitor für 900,- DM auf den Markt. Näheres siehe [1].

etwaige Fehler zu finden und zu beheben. Diese Notwendigkeit wurde nach einiger Zeit abgeschwächt, da sich zum einen das Softwareangebot extrem vergrößerte, zum anderen viele Raubkopien auf den (Schwarz-)Markt kamen, welche auf den mittlerweile erschwinglich gewordenen Disketten zur Verfügung standen. Der Heimcomputer entwickelte sich zur Spielkonsole, deren sinnvoller Einsatz von vielen Eltern vergebens gefordert wurde (vgl. Tabelle über außerschulischen Computereinsatz [115], S. 285). Nur wenige Heimcomputersysteme waren mit Druckern ausgestattet. Auch der Haupteinsatz des später erschienenen Amiga 500 ist im elektronischen Spielen zu sehen (vgl. [1]). Trotzdem gab es gerade zu Beginn hochspezialisierte Computer-Kids, welche viel Zeit in die Arbeit mit dem Rechner investierten und hier hervorragende Ergebnisse erzielten.



Abbildung 12, Der Amiga 500 mit Festplatte (1987), Quelle: [1]

Schulergänzende Übungsprogramme, wie zum Beispiel Vokabeltrainer, hatten zeitweiligen Erfolg (vgl. [14], S. 8). Das Arbeiten mit ihnen war jedoch noch umständlich. Das Interesse an Heimcomputern flachte ab, als schließlich Spielkonsolen auf den Markt kamen, welche zum einen günstiger, zum anderen bedeutend leichter zu bedienen waren als die heimischen Rechner. Einige Vertreter solcher Konsolen sind zur Zeit die Sony-Playstation oder das Sega-Dreamcast. Zahlreiche Nachfolgermodelle des legendären C64 konnten sich nicht etablieren und wurden, meist aufgrund mangelnder Nachfrage, noch nicht einmal in Serie produziert (vgl. [1]). Parallel entwickelten sich die Personal-Computer weiter. Sie haben mittlerweile den Weg in viele Kinderzimmer gefunden. In den Achtzigern kamen die ersten Multimedia PCs auf den Markt. Durch deren Möglichkeiten wurde Lern- und Informationssoftware einem breiten Publikum präsentiert. Die meisten deutschen Haushalte haben einen Computer und nutzen ihn neben Spielen zum Arbeiten, Lernen und stetig mehr für Internetanwendungen. Programmieren spielt dabei nur noch eine untergeordnete Rolle und wird von den meisten Usern nicht erlernt. Lediglich die Websprachen HTML und Java(script) erfreuen sich weiter Verbreitung und Vermarktung, da diese zur professionellen Publikation von Webseiten im World Wide Web (WWW) notwendig sind (vgl. [120]; [160]). Doch auch hierfür stehen Editoren zur Verfügung, welche es ermöglichen, das Programmieren zu umgehen (MS-WordTM kann z.B. HTML-Dokumente erstellen). Ich verweise an dieser Stelle auf Absatz 3.8, in welchem Möglichkeiten des internetgestützten Mathematiklernens angerissen werden.

3.2 Die schrittweise Integration des neuen Mediums Computer

In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der Beziehung Unterricht und Computer in Bezug auf dessen Inhalte, Gegenstände, Prinzipien, Sozialformen und Methoden beleuchtet. Beschrieben wird zu Beginn nochmals die These Skinners und ein Modell zu dessen Umsetzung, welches sich speziell in Grund- und Hauptschulen etablieren sollte. Im Weiteren werden für das Scheitern des programmierten Unterrichts herangezogene Argumente auf die heutigen Verhältnisse übertragen und auf deren Haltbarkeit hin überprüft. Beispiele aus der Praxis finden im nächsten Abschnitt Berücksichtigung. Wünschenswerte Prinzipien und Erwartungen an rechnergestützten Mathematikunterricht werden hinterfragt. Schließlich soll die Veränderung der Lehrerrolle durch den Einsatz von Rechnern dargestellt und für den

computergestützten Unterricht scheinbar geeignete Sozialformen umrissen werden. Ziel dieses Abschnitts ist es nicht, den jeweiligen Entwicklungsstand tabellarisch festzuhalten. Vielmehr soll herausgestellt werden, welche Prozesse und Ideen zur heutigen Stellung des Computers im Unterricht führten.

Bereits seit Ende der Fünfziger Jahre wurden Computer, wenn auch in geringem Umfang, zu Ausbildungszwecken herangezogen. Der Psychologe Skinner beeinflusste die Entwicklung von Lernsystemen maßgeblich. 1954 stellte er die These auf, dass **jede** Wissensvermittlung systematisiert werden kann. Der Stoff, d.h. das, was der Lernende später wissen und verstehen soll, müsste nur in genügend kleine (kleinste) Lernschritte zerlegt und dem Lernenden in einem systematisierten, interaktiven und linearen Lehrgang vorgelegt werden (vgl. [163], S. 153ff). Das Konzept des *Programmierten Unterrichts* entstand. Der Lehrende sollte überflüssig werden, der Computer als alleiniger Wissensvermittler dienen (vgl. [14], S. 7). Skinner führte folgende Vorteile des programmierten Unterrichts an:

- „Die Maschine kann immer und unmittelbar bekräftigen
- die Maschine ist emotional indifferent
- alle Lerninhalte, die sich in Lehrschrte einteilen lassen, sind vermittelbar.“

(entnommen [91], S. 49)

Im Sinne Skinners kann dies durch den linearen Aufbau eines Programms erreicht werden, welche für Grund- und Hauptschulen die wichtigste Form von Lernprogrammen sein sollte. Strehl entwickelte hierzu ein Diagramm, welches den Aufbau eines solchen Programms charakterisiert:

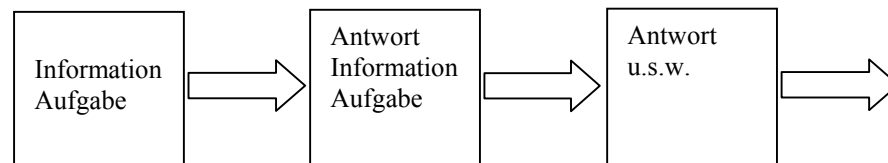


Abbildung 13, Aufbau von Lerneinheiten im Sinne von Skinner,

Quelle: [163]

Umsetzungen solcher (nicht rechnergestützten) Programme für den Mathematikunterricht finden sich ebenfalls im Artikel von Strehl. Hier wird auch ein Modell für verzweigte Lernprogramme angeboten, welche bezüglich des Aufbaus bereits an Practice&Drill-Programme erinnern. Diese sind jedoch, nach Skinners Theorie, in sich widersprüchlich (näheres siehe [163]).

Der Erfolg des Programmierten Unterrichts blieb weitgehend aus. Hofmann führt hierfür folgende Gründe an:

- „Der konzeptionelle Irrtum, dass der Frontalunterricht mit Lehrer durch einen Frontalunterricht mit Computer ersetzt werden kann, wurde erst nach längerer Zeit erkannt.
- Da Lernsysteme dieser Zeit auf Großrechenanlagen liefen, musste der Teilnehmer über ein gehöriges Maß an EDV-Kenntnissen verfügen und eine relativ unkomfortable Benutzeroberfläche hinnehmen.
- Ausgenommen großer Unternehmen und Universitäten konnte sich niemand die notwendigen Technologien für die Realisation eines solchen Systems leisten“

(entnommen [76])

Der Programmierunterricht, als universales Konzept, stellte sich als schlechter moderner Frontalunterricht heraus. Dennoch greifen auch heute noch Lernprogramme auf Teile dieses Konzepts zurück (vgl. [150], S. 18). Software, welche Lerninhalte in kleine Lernschritte unterteilt die vom Lernenden zu bearbeiten sind und anschließend nach erfolgreicher Wiederholung „Belohnungen“ verteilt, findet man zum Beispiel in der Lernreihe Addy (vgl. [67]). Der streng lineare Aufbau existiert hier jedoch nur noch bedingt. Größtenteils kann sich der Lernende frei bewegen. Dennoch ist der Einsatz dieser Software zu rechtfertigen, wenn es sich um standardisierte Inhalte handelt, welche eingeübt werden sollen (vgl. [14], S. 13). Die von Hofmann genannten Argumente sind auf den heutigen Stand bezogen kaum, bzw. nur noch bedingt zutreffend und haltbar. Das erste Argument ist aus heutiger Sicht eine triviale Aussage. Die Idee und ihre radikale Umsetzung scheinen im nachhinein illusorisch. Die heutige Diskussion sollte den Programmierunterricht unter Berücksichtigung der damaligen radikalen Position betrachten. Das zweite Argument ist fast vollständig entkräftet. Die Computerbedienung sollte mittlerweile von fast jedem, zumindest in Ansätzen, beherrscht werden. Ein Blick in die Stellenanzeigen macht dies deutlich. Die Arbeitsumgebungen sind benutzerfreundlich geworden und bieten, falls entsprechend eingerichtet, einen ansprechenden Aufbau. Das dritte Argument ist, dank der Massenware Computer, nicht mehr relevant. Bereits für unter 1500,-DM können PC-Komplettsysteme erworben werden, die somit auch für Privathaushalte erschwinglich sind (vgl. [150], S. 1).

Dies soll kein Plädoyer für den Programmierunterricht sein. Lediglich sei darauf hingewiesen, dass Argumente, welche gegen den Einsatz heute entwickelter Methoden in Erinnerung an den Programmierunterricht sprechen, stets im historischen Kontext betrachten werden müssen. Die Beurteilung der Effektivität und Umsetzbarkeit neuer Ideen kann nur ein Prozess von Erfahrung und empirischer Forschung sein und darf nicht durch theoretische Gedankengerüste ersetzt werden. Oder anders: *Die Praxis wird (muss) es zeigen!*

Der Programmierunterricht wurde häufig durch entsprechende Literatur in den Fachunterricht eingebracht (vgl. hierzu exemplarisch [53]). Elektronische Umsetzungen fanden in Schulen keine weite Verbreitung. Auch die Einrichtung eines eigenen Unterrichtsfachs wurde mit ihm nicht praktiziert. Erst die Einführung der Mikrocomputer in den Siebziger Jahren gab entscheidende Impulse dafür, das Unterrichtsangebot an Schulen durch das Wahlfach Informatik zu bereichern (vgl. [44], S. 49; [76]). Hier wurden Algorithmen entwickelt und auf entsprechenden Plattformen implementiert. Auch diese Form des Unterrichts existiert noch. Dabei steht die Umsetzung von geeigneten Projekten und deren Implementierung immer noch im Vordergrund. Gerade in den achtziger Jahren wurde der Rechneinsatz durch das Erlernen einer Programmiersprache und der Kenntnis technischer Details (Prozessor, Bus, etc.) geprägt. In anderen Fächern besaß der Rechner wenig oder keine Bedeutung²⁰. Häufig waren Programmiersprachen wie Basic, Pascal, Elan, Fortran, Comal, Lisp, Prolog etc. Gegenstand des Unterrichts (siehe hierzu u.a. [41], S. 106f; [50]; [52]; [90]; [93]; für deren Verbreitung an Schulen vgl. [115]). Diese zeichnen sich (meist) nicht durch überdurchschnittliche Eignung für den Mathematikunterricht aus. Vor der Erarbeitung mathematischer Begriffe stand das Erlernen mehr oder weniger komplizierter syntaktischer Regeln und von z.T. nicht immer aus dem Zusammenhang ergebenden Schlüsselworte. Großen Bekanntheitsgrad gewann dabei die Programmiersprache LOGO. Durch die von Papert, Schüler des Schweizer Psychologen Jean Piaget (vgl. [78], S. 36), entwickelte Igelgeometrie sollte ein fruchtbarer Zugang zu mathematischem Wissen geschaffen werden (vgl. [116], S. 37f).

²⁰ Zu dieser Zeit stand der Autor in der Sekundarstufe 1 der gymnasialen Ausbildung.

aber auch [164], S. 228). Bereits im Jahre 1969 testete er dieses Programm an Schülern (vgl. [49], S. 8). Mit einem Dreieck (Turtle) werden durch die Eingabe von Befehlen (... Schritte vor, ... Schritte zurück, Drehe im Winkel von ...°) in Form von Tastendrücken, Figuren auf dem Bildschirm gezeichnet. Emulationen von LOGO waren später für viele Rechnersysteme (u.a. CPC-464) verfügbar und fanden den Einzug in die Schule. Mehlhase fand in ihrer Untersuchung immerhin noch vier Schulen (von 45), an welchen die Programmiersprache LOGO vorhanden war (vgl. [115], S. 279). Nicht mehr die Programmiersprache, sondern das Erstellen von Grafiken, Figuren oder anderen Gebilden hatte Vorrang. Ähnliches versucht auch das von Schwirtz an der Universität Essen entwickelte Programm IGEL, welches im Bereich der Grundschule eingesetzt wird (vgl. [159]). Hier sind feste Gitterpunkte auf dem Bildschirm vorgegeben, entlang derer sich ein Dreieck (Igel) bewegen kann. Dieser wird durch bestimmte Tasten navigiert (näheres siehe [158]). Programme dieser Art haben sich mittlerweile im Bereich der Grundschule, wenn auch in geringem Umfang, etabliert und werden in deren Unterricht integriert (Beschreibungen von konkreten Unterrichtseinheiten, deren Ausführung und Erfahrungen sind in [81] aber auch [50] zu finden). Viele weitere Produkte für Schüler dieses Alters werden hochfrequentiert entwickelt und auf den Markt gebracht (vgl. [83], S. 57). Nicht alle sind jedoch für den Einsatz in der Schule geeignet (siehe auch [67]). Trotzdem ist damit zu rechnen, dass gerade Kinder dieses Alters in Zukunft stark mit dem neuen Medium konfrontiert werden²¹. Auch an weiterführenden Schulen, also in der Sekundarstufe I und II, wird der Rechner mittlerweile in vielen Klassen und Jahrgangsstufen eingesetzt. Der Informatikunterricht wird häufig im Wahlpflichtbereich ab Klasse 9 an Gymnasien, Real- und Gesamtschulen angeboten, an Hauptschulen sogar ab Klasse 7 (vgl. [115], S. 284). Hier werden, auch in der Sekundarstufe I, Programmiersprachen gelernt und Projekte umgesetzt (vgl. [90]). Schulische Bemühungen äußern sich in NRW durch die mittlerweile im Bereich der Mittelstufe angesiedelte IKG²². Sie soll bereits schulformübergreifend in den Klassen 7 bis 9 im Rahmen der Fächer vorgenommen werden (vgl. [144], S. 26).

Die Implementierung von Programmen außerhalb des Informatikunterrichts (Beispiel hierzu siehe u.a. [77]) verlief sich im Laufe der Zeit und der Schwerpunkt verlagerte sich vom technischen Wissen zur Anwendung und Nutzung des neuen Mediums (vgl. [116], S.39-40). Zu Beginn der Neunziger überwogen, nach der Untersuchung von Mehlhase, vorhandene und eingesetzte Anwendungen gegenüber den Programmiersprachen (vgl. [115], S. 279f). Trotzdem wurden und werden immer noch Ansätze vorgestellt, welche vorschlagen, Probleme des Mathematikunterrichts in althergebrachten Programmiersprachen umzusetzen (vgl. [88]). Inwieweit dies umsetzbar bzw. sinnvoll ist, soll an dieser Stelle offen bleiben. Simulationsprogramme, CAS²³ etc. wurden professioneller, bedienungsfreundlicher²⁴ und umfangreicher. Der Rechner entwickelte sich zum Werkzeug und lieferte sowohl im naturwissenschaftlichen als auch im Mathematikunterricht akzeptable Möglichkeiten der Wissensaufbereitung.²⁵ Er vereinfachte anschauliche Darstellungen zum Teil immens.²⁶ Hierzu wurden Erfahrungsberichte gesammelt und Möglichkeiten bzw. Risiken des Computereinsatzes

²¹ nähere Informationen finden sich in [83].

²² Informations- und Kommunikationstechnische Grundbildung.

²³ Computer Algebra Systeme.

²⁴ neuere Systeme werden in WINDOWSTM integriert und sind ähnlich wie Standardprogramme (z.B. MS-WordTM) zu bedienen.

²⁵ 38% der von Mehlhase befragten Hauptschulen, 43% der Realschulen, 65% der Gymnasien und 100% (!) der Gesamtschulen setzten zu diesem Zeitpunkt den Rechner im Mathematikunterricht ein (vgl. [115]).

²⁶ Dies wird auch bedingt durch die Möglichkeit, anschaulicheres und professionelleres Filmmaterial mit Hilfe moderner Computer erstellen zu können.

abgewogen (siehe z.B. [11]; [131]; [95]; [154]). Den stetigen Siegeszug des Computers fördern unter anderem die von den Bezirksregierungen genehmigten Unterrichtsversuche, welche den Rechner in allen mathematischen Schuldisziplinen in den Mittelpunkt stellen und sogar bis zum Abitur führen (Beachte u.a. [74], S. 78-88). Das Anfertigen von Klausuren soll dabei ebenfalls am Rechner vorgenommen werden.²⁷ Auch die Hersteller von CAS Systemen können die Integration ihrer Produkte fördern. So bietet zum Beispiel die Firma Texas Instruments den kostenlosen Verleih von Handhelds für ganze Klassen an. Das massive wirtschaftliche, politische und gesellschaftliche Interesse der Integration des Computers (vgl. [173], S. 7) in die schulische Ausbildung treibt deren Verbreitung weiterhin voran. Welche Veränderungen ergeben sich hieraus für den alltäglichen Unterricht?

Vorstellungen und Ideale, die der rechnergestützte Unterricht suggerieren bzw. repräsentieren soll, führten bei Betroffenen zu ambivalenten Haltungen. Beide Seiten, also sowohl Befürworter als auch Kritiker, pauschalisieren und generalisieren häufig bei ihren Argumentationen. Ein Beispiel soll dies demonstrieren. Der hier angesprochene Wandel von Unterrichtsmethodik, der Lehrerrolle und dem Überwiegen bestimmter Sozialformen im computergestützten Unterricht, wird im Anschluss diskutiert und relativiert.

Natürlich unterliegt der traditionelle Unterricht, bei Betrachtung der aus dem Computereinsatz entstehenden notwendigen neuen Methoden, Verschiebungen (siehe u.a. [154]). Zum Einsatz von Derive schrieb beispielsweise Kayser²⁸:

„Arbeitsaufträge an die Lernenden – in Partner- oder Gruppenarbeit auszuführen – können nun offener formuliert werden, unsere Schülerinnen und Schüler lernen, im Team zu arbeiten und Verantwortung für eine gemeinsame Aufgabe zu übernehmen, fachübergreifende Themen werden zugänglich, Mathematikunterricht wird effizienter, spannender, und zwar für Lernende und Lehrende.“

([89], S. 8)

Er führt damit einige Argumente von Befürwortern des Computereinsatzes an. Die von ihm genannten Verschiebungen tragen alle positiven Charakter. Typische Schlagworte sind dabei **Offen**, **Team**, **Verantwortung**, **fächerübergreifend**, **Effizienz** und auch **spannend**. Jedes einzelne dieser Schlagworte weist auf einen mehr oder minder großen Missstand im Mathematikunterricht hin. So ist der Unterricht meist **eng** an Büchern orientiert, findet im **Frontalunterricht**²⁹ statt und ist dadurch geprägt, dass Schüler Aufgaben eigenverantwortlich in **Einzelarbeit** lösen. Gruppenunterricht ist die Ausnahme. Schüler lernen **fachspezifisch** und **kontextfrei**, investieren viel Zeit in das Entwickeln von Strategien, das Lernen von **Kalkülen** und sind häufig durch den Mathematikunterricht, zu dem auch viele eine **negative Einstellung** haben, **gelaugweilt**. Des Weiteren steht jedes dieser Schlagworte für einen Unterricht, den die meisten Pädagogen und Didaktiker als guten Unterricht bezeichnen. Ob Derive die von Kayser angeführten Auswirkungen bedingen kann, wurde und wird in zahlreichen Unterrichtsversuchen untersucht. Klar ist jedoch aus meiner Sicht nur, dass der Unterricht Veränderungen unterliegt. Ob diese, im Sinne eines guten Unterrichts positiven Charakter tragen, sollte im Einzelfall beurteilt werden. Ebenfalls nicht zu vernachlässigen ist die starke Abhängigkeit von

²⁷ Quelle: www.bezreg-duesseldorf.nrw.de/schule/mathe/chat/chat5/r13.htm, Auszug aus dem Richtlinienentwurf für die SII in NRW Stand August 1998 (vgl. ggf. [2]).

²⁸ Kaiser, H.J.; Fachleiter Mathematik am Studienseminar Düsseldorf, hat zahlreiche Veröffentlichung zu Derive und dessen Einsatz im Mathematikunterricht publiziert. Viele erschienen in der Zeitschrift Praxis der Mathematik.

²⁹ Näheres zum Frontalunterricht, dessen Entwicklung und dessen Praxis siehe in [117], S. 182-193.

Unterricht und Lehrerpersönlichkeit (vgl. [37], S. 85-87). Trotzdem werden häufig mit einer gewissen Ausschließlichkeit lehrerunabhängige Faktoren des Unterrichts für dessen Erfolg verantwortlich gemacht. Das folgende Zitat soll dies relativieren. Meyer beschreibt den Zusammenhang zwischen Prinzipien des Unterrichts, wie sie unter anderem auch von Kayser angedeutet wurden, und konkreten Unterrichtskonzepten wie folgt:

„Einzelne Prinzipien können, wie die folgende Zeichnung zeigen soll, für mehrere Unterrichtskonzepte Bedeutung erlangen. Es passiert aber auch immer wieder, dass »der Himmel voller Geigen hängt« wird, dass also Prinzipien mit beredeten Worten vorangestellt werden, die sich in den Vorlieben für konkrete Sozialformen und Handlungsmuster der zugehörigen Unterrichtskonzepte dann aber gar nicht wiederfinden: ... Deshalb bekommen Prinzipien oft auch den Charakter pädagogischer Slogans, die eher dazu da sind, das eigene Wollen in hellerem Licht erscheinen zu lassen und die Position des »Gegners« zu verunglimpfen, als wirkliche theoretische Klärung zu schaffen.“

([117], S. 209f)

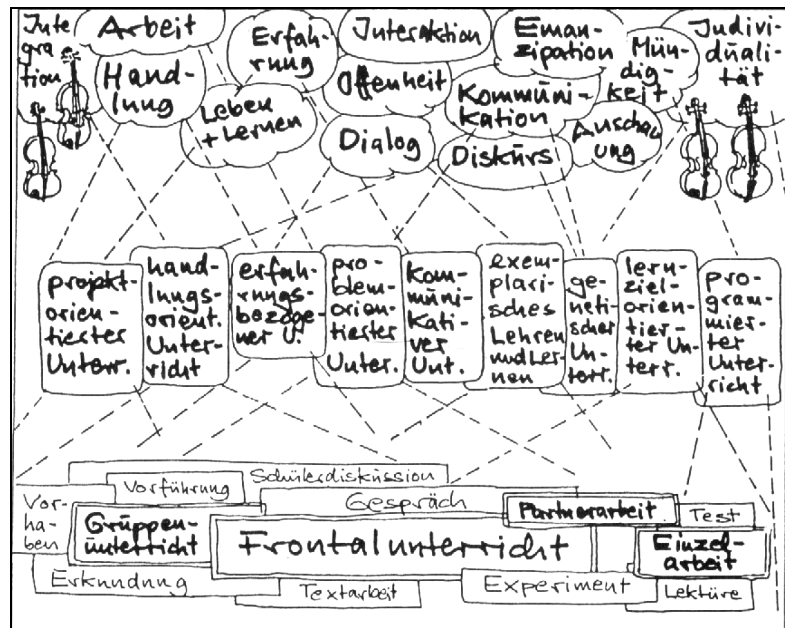


Abbildung 14, Prinzipien und Methoden; Quelle: [117], S. 209

Weder die Wahl der Sozialform, der Inhalte, Ziele, Werkzeuge oder Methoden garantieren, dass Aufgaben offener gestellt werden können oder Teamarbeit gefördert wird. Auch andere wünschenswerte Folgen können nicht durch Regulation eines Aspekts von Unterricht provoziert werden. Trotzdem kann der Rechner in der Schule schüleraktivierende, handlungsorientierte Phasen begünstigen (vgl. [171], S. 326; [131]). Seine Integration setzt jedoch keinen Automatismus in Gang. Das von Schulz-Zander angeführte Beispiel:

„So fördert z.B. der Einsatz eines Textverarbeitungsprogramms nicht automatisch den Schreibprozess im Sprachenunterricht, wichtig ist der didaktische Ansatz.“

(vgl. [156], S. 11)

unterstreicht dies und weist darauf hin, dass der Rechneinsatz konkrete Konzepte erfordert. Der Versuch radikaler Veränderungen, welche ganze Systemstrukturen ablösen sollen, scheiterten bereits mehrfach in der Vergangenheit. Weigand prognostiziert auch für die Zukunft die Gültigkeit der Aussage Freudenthals:

„Reformen sind eine Sache von Menschen, nicht von Papier (Freudenthal)“

(zitiert nach [171], S. 325)

Der Lehrer kann nicht übergangen oder vernachlässigt werden. Trotzdem ist seine Rolle einer Veränderung ausgesetzt, die nicht zuletzt, jedoch auch nicht ausschließlich (vgl. [156], S. 11), durch die neuen Medien beeinflusst wird.

„Beim computerunterstützten Unterricht (ob im Computerraum oder mit dem TI-92) ist der traditionelle lehrerzentrierte Unterricht nicht mehr aufrechtzuerhalten, der Lehrer steht vor völlig neuen Problemen. Er wird zum einen zum individuellen Berater für unterschiedlich schnell lernende Arbeitsgruppen und zum anderen der Koordinator dafür, dass in der Klasse (oder Gruppe) dennoch eine Basis für gemeinsame Gespräche vorhanden bleibt.“

([171], S. 325)

schrrieb Weigand und wird hiermit wohl auch Recht behalten. Ähnliches wurde im Rahmen einer qualitativen Studie gefunden. Schulz-Zander berichtet über diese:

„Ergebnisse einer qualitativen Studie bei Grundschullehrerinnen und -lehrern, die mit der Hypermedia-Arbeitsumgebung „Grünes Klassenzimmer“ gearbeitet haben, zeigen, dass diese ihre eigene Rolle in spezifischer Weise verändert sehen: Sie stehen weniger im Mittelpunkt, erleben die Schülerinnen und Schüler stärker eigenaktiv und nehmen teilweise selbst eine Rolle als Lernende ein. Viele finden, dass sie durch die Freiarbeit der Schülerinnen und Schüler Zeiträume zur Beobachtung der Lernenden erhalten und diese für die Steuerung sozialer Prozesse im Unterricht nutzen können (Müller 1995)“

([156], S. 11)

Dies erfordert, dass die Lehrperson

- fähig ist, ihre eigenen Vorstellungen von Unterricht deutlich zu modifizieren.
- bemüht ist, sich Kenntnis über neue Ideen zu verschaffen.
- bereit ist, neue Ideen und deren Umsetzung zu diskutieren und zu reflektieren.

Des Weiteren müssen Sozialformen, wie z.B. Gruppenarbeit in Klassen oder Kursen durchführbar sein. Nicht zuletzt disziplinarische Probleme können ein Kollegium hiervon abbringen. Dass die traditionelle Sozialform des Frontalunterrichts bei der Integration nicht sinnvoll aufrechterhalten werden kann, ist eine Vorstellung, die vielen Lehrkräften nicht gefällt. Sie verlieren, wenn auch geringfügig, die (subjektive) Kontrolle über Klasse, Stundenverlauf und Ergebnis. Nicht zuletzt aus diesem Grund ist es notwendig, Lehrer auch fachwissenschaftlich soweit auszubilden, dass sie nicht nur den Schulstoff, sondern auch jegliche mögliche Unterrichtsergebnisse und -produkte (oder zumindest die meisten) schnell

erfassen und verstehen können. Ein offen angelegter Unterricht, der an interessanten Stellen aufgrund fachlicher Unzulänglichkeiten der Lehrperson eingeengt wird, verdient diesen Namen nicht. Unterricht, der nicht offen angelegt ist, kann keine (wahre) un gelenkte Selbsttätigkeit der Schüler hervorbringen (vgl. [82], S. 9). Baumgartner und Payr schreiben im Zusammenhang mit der Theorie des Konstruktivismus:

„Ihre (Die Lehrkraft) lehrende Funktion nimmt sie einerseits auf Grund ihrer großen Erfahrung wahr, andererseits aber dadurch, dass sie relativ selten Fehler macht.“

([17], S. 108)

Hinsichtlich des Fachunterrichts kann unter Erfahrung durchaus die fachliche Kompetenz verstanden werden. Das folgende Fazit fasst die angesprochenen Aspekte von Unterricht und seinem Wandel bei der Integration der neuen Medien zusammen und relativiert meinen Standpunkt. So wird nicht erwartet, dass das Lernen durch neue Medien revolutioniert wird, sondern vielmehr, dass mit Innovationen sinnvoll umgegangen wird. Hierzu gehören Sensibilisierungsprozesse für das Finden von Chancen für den Unterricht, welche der Rechner eröffnet.

Die Integration des Rechners in den schulischen Unterricht erweitert dessen Spektrum bezüglich seiner möglichen Inhalte, Gegenstände und Zielsetzungen. Lehrer mit entsprechender erzieherischer, fachlicher, methodischer Kompetenz und positiver Einstellung bezüglich der neuen Medien können ihn nutzen, um Schüler unter Berücksichtigung ihrer Lebensrealität zu unterrichten. Dazu müssen entsprechende Rahmenbedingungen vorhanden sein. Erst dann können sich die positiv assoziierten Eigenschaften von rechnergestütztem Unterricht entfalten und somit beobachtbar werden.

Nicht das Einbringen von Schlagworten in die didaktische Diskussion macht Unterricht besser. Nur beobachtete Lernerfolge und deren anschließende kritische Reflexion können Einblicke in Erfolg und Effizienz bieten.

Jegliche erfolgsversprechende Konzeption muss in der Praxis umsetzbar sein und zusätzlich Vorteile gegenüber dem Ist-Zustand bieten. Dies ist jedoch nur aus der Praxis entscheidbar. Fehleinschätzungen sollten schnell als solche erkannt und nicht künstlich, z.B. aufgrund der Schönheit einer Theorie, zwanghaft aufrecht erhalten werden.

3.3 Substitution traditioneller Methoden durch rechnergestützte, zur Wichtigkeit des Übens

Übungseinheiten sind sowohl in der Sekundarstufe I, als auch in der Oberstufe ein fester Bestandteil des Mathematikunterrichts (vgl. [22]; [26]; [124], S.67; [125], S.46f). Gemeinsam erarbeitete Zusammenhänge werden mit Hilfe von Übungsaufgaben, welche auch häufig in Einzelarbeit³⁰ anzufertigen sind, gefestigt, vertieft und mit anderen Inhalten und Fertigkeiten verbunden (vgl. [22], S. 106, oder auch [176], S. 103f). Ein zentraler Punkt von Übungseinheiten sind Rückmeldungen für die Lernenden.

³⁰ z.B. im Rahmen der Hausaufgaben.

„Übungsaufgaben haben wenig Sinn, wenn Lernende ohne Rückmeldung bleiben, ob ihre Lösungen richtig oder falsch sind. Es gibt nicht wenig Situationen, in denen solche Rückmeldung unterbleibt: Arbeitsblätter, die ohne von der Lehrerin überprüft zu werden, in der Mappe abgelegt werden, Hausaufgaben, die niemand nachsieht. In anderen Fällen erfolgt die Rückmeldung so spät, dass sie mit dem ursprünglichen Denkprozess nicht mehr im Zusammenhang steht und daher für die Lernenden subjektiv ohne Bedeutung ist.“

([98], S. 76)

Gerade solche Übungseinheiten scheinen besonders geeignet, um durch rechnergestützte Lernprogramme begleitet (vgl. [164], S. 228) oder sogar ersetzt werden zu können. Sie können Übungseinheiten unterstützen und das auch in der Bruchrechnung angebrachte „Practice and Drill“ (vgl. [100]) attraktiver gestalten. Visionäre gehen zum Teil soweit, das Ende aller bislang gewohnten staatlichen Bildung im System Schule anzukündigen (vgl. [112], S. 164; „School's out“ Lewis J. Pereman). Computer unterstütztes Lernen³¹ kann im Idealfall ein Höchstmaß an individuellem Lernen, zeitlicher und lokaler Flexibilität, Differenzierung, Anpassung an das Lerntempo und Anschaulichkeit bieten. Kritiker des Rechneinsatzes zum Ersatz herkömmlicher Methoden argumentieren mit einer Unterforderung des Computers und dem Verteuerungsfaktor des Lernens (vgl. [137], S. 58). Dieses Argument wurde mittlerweile stark entkräftet, da Rechneranlagen häufig vorhanden sind (vgl. Ausführungen Abschnitt 3.2) und lediglich entsprechende Software bereitgestellt werden müsste.

Geeignete Lernprogramme können die selbstständige Nacharbeit von versäumtem oder nicht verstandenem Stoff unterstützen (vgl. [172]). Ihr Nutzen im traditionellen Unterricht kann somit primär in der Linderung der Heterogenität von Schülerleistungen gesehen werden. Individuelle Probleme können, bei entsprechenden Rahmenbedingungen, fokussiert und in Kleingruppen oder Einzelgesprächen behandelt werden. Gerade für schwächere oder schüchterne Schüler stellt dies eine Chance dar (vgl. u.a. [164]). Die Relativierung der Lehrerrolle scheint ebenfalls wünschenswert. An dieser Stelle sei Dienes angeführt, der bereits 1960 schrieb:

„Es wird wahrscheinlich nötig sein, die gegenwärtige Methode des Schulunterrichts mit dem Lehrer in zentraler Machtposition fast völlig aufzugeben und durch individuelles Lernen oder Lernen in kleinen Gruppen zu ersetzen, wobei konkretes Anschauungsmaterial und schriftliche Anleitungen verwendet werden und der Lehrer als Führer und Ratgeber wirkt.“

(Dienes, Z.P., 1960, entnommen [78])

Die Substitution von traditionellen Übungseinheiten durch rechnergestützte gibt dem Lehrer neue Möglichkeiten und kann zu einem hochwertigeren Unterricht beitragen. Einige positive Aspekte des Lernens und Übens mit Lernprogrammen werden auch häufig mit einer weiteren Möglichkeit der Leistungsverbesserung assoziiert. Nachhilfeunterricht, wobei die fachliche Unterstützung der Eltern hier impliziert sei (Eine in [134] beschriebene Befragung ergab, dass 80% (!) der Mütter mit ihren Kindern (1. Klasse) sogar über die Hausaufgaben hinaus üben; In [126] wird angegeben, dass noch 53% der Eltern von 15jährigen zugaben, ihren Kindern bei Hausaufgaben zu helfen. Ausführungen zur Beziehung von Eltern und Nachhilfe finden sich in [36]), ist die traditionelle Form der schulischen Nacharbeit. Sie kann einen Wettbewerbsvorteil

³¹ Abkürzung: CUL, oder CBT (Computerbased Training).

verschaffen (vgl. [19]), schließt Wissenslücken, ermöglicht die Mitarbeit des Schülers, vermittelt Erfolgserlebnisse und überbrückt Leistungstiefs ohne Faulheit zu unterstützen (vgl. [19]). Geeignete Lernsoftware könnte eine Alternative zu der bisher von Nachhilfe dominierten häuslichen Nacharbeit sein. Auch die Abschwächung sozialer Diskrepanzen könnte aufgrund der meist hohen Kosten³² von Nachhilfeunterricht gefördert werden (siehe u.a. [111], S. 47).

„Nachhilfeunterricht wird als eine Massenware verkauft, die aufgrund ihrer Kosten nicht allen sozialen Schichten zugänglich ist. Das bildungspolitische Postulat, Chancengleichheit zu gewährleisten, wird damit allerdings infrage gestellt.“

([147], S. 34)

Maaß spricht in diesem Zusammenhang von zwei verschiedenen Märkten, dem Vormittagsmarkt, welcher durch die Schule geprägt wird, und dem Nachmittagsmarkt, in welchem Nachhilfe und Hausaufgaben erledigt werden (siehe u.a. [110], S. 341; [83], S. 12; [123], S. 25). Prognostiziert wird im Nachmittagsmarkt ein notwendiger Anstieg in punkto Programmattraktivität beim Übergang vom schulinternen zum schulexternen Einsatz. Dies halte ich insofern für beachtenswert, als dass lediglich attraktive Programme eigenständiges Lernen fördern können und somit den Schüler in eine aktive Position versetzen. Der Spaß sollte beim computergestützten Einsatz von Lernprogrammen im Nachmittagsmarkt ebenfalls nicht zu kurz kommen und motivierende Momente sollten zur Genüge vorhanden sein. Die meisten Lernprogramme für die Sekundarstufe I versuchen dies durch gezieltes Instruieren der Lernenden. Dem meist tutoriellen Charakter dieser Programme steht der konstruktivistische Ansatz entgegen (vgl. [149], S. 65). Dieser lässt jedoch außer Betracht, dass z.B. die hier exemplarisch betrachtete Bruchrechnung, ebenso wie andere Lerninhalte des Unterrichts, zu nicht geringem Anteil erfolgreich mit instruktionalen Methoden behandelt werden können³³. Wie später noch gezeigt wird, bestehen Attraktivitätsunterschiede zwischen computergestütztem und traditionellem Lernen und Üben. Zumindest die partielle Substitution traditioneller Methoden durch rechnergestützte ist es wert methodische und inhaltlich hinterfragt zu werden. Im Unterrichtsprozess könnten Lernprogramme eine willkommene Abwechslung sein (vgl. [110], S. 341). In Bezug auf die durchgeführte empirische Studie ist dies keine subjektive Vorabschätzung, sondern entspricht dem Urteil von Probanden, welche in Kontakt zu einem relativ unspektakulären Programm standen. Lernprogramme können das Erreichen einer hinreichenden Volition³⁴ unterstützen und somit eine Situation inszenieren, in welcher Schüler bereit sind, einen hohen Arbeitsaufwand aufzubringen. Weitere wichtige Aspekte in der Rechtfertigungsproblematik der Substitution sind Effizienz und der Erfolg von rechnergestütztem Lernen. Laut Kerres sind mediengestützte Lernverfahren anderen Varianten nicht unterlegen (vgl. [91], S. 115). Personen mit hoher Autonomie und Motivation können das multimediale Angebot zur intensiven kognitiven Auseinandersetzung nutzen. Der dabei erzielte Erfolg ist eine subjektive Größe, die im schulischen Kontext durch die von vielen Parametern beeinflusste Note geprägt ist³⁵. Die Unzulänglichkeit und Fehlerlastigkeit von

³² 45 Minuten Einzelunterricht kostete 1998 im Nachhilfeinstitut MTI Velbert (Mathematisch Technisches Institut) 37,- DM (18,92€). Aber auch Preise um 60,-DM (30,68€) pro Unterrichtsstunde sind durchaus üblich.

³³ Dies kann z.B. aus Gründen zeitlicher Ökonomie geschehen.

³⁴ vgl. [18], S. 27, "Unter Volition wird das Durchhaltevermögen bezeichnet, die Konzentration auf bestimmte Ziele verbunden mit dem festen Willen, diese erreichen zu wollen."

³⁵ Eine Definition dessen, was unter Erfolg im schulischen Rahmen verstanden werden kann, stammt von Krapp. Er sieht Schulerfolg und Schulversagen als qualitative Kategorien, die zum Ausdruck bringen, dass die individuell

Noten wurde von zahlreichen Autoren hinterfragt und empirisch beleuchtet (vgl. u.a. [85]; [36], S. 8f). Trotzdem ist sie zur Zeit die entscheidende Größe, welche über Erfolg und Misserfolg³⁶ im Bereich Schule entscheidet. Andere Kompetenzen, wie der Transfer erlernter Inhalte auf neue, für den Lernenden hochwertige Kontexte, scheinen einer intuitiven Definition des Erfolgs mehr genüge zu tun, sind jedoch nicht mit der allgemeinen Einschätzung von Schulleistung kompatibel (vgl. [36], S. 9; Eine Diskussion des schulischen Leistungsbegriffs erfolgt u.a. in [108], S. 4f).

Zwischen Schülermotivation und Übungseinheiten existieren Verknüpfungen. Hole erläutert in diesem Zusammenhang, dass Schüler einen großen Teil ihrer Motivation aus dem Lösen von Routineaufgaben ziehen (vgl. [78], S. 214). Verknüpft mit ihrer hohen Interaktionsdichte könnten Lernprogramme für den Schüler einen nicht geringen Anreiz bieten. Bleibt die Betonung der direkten Verknüpfung von Note und Erfolg nicht einziges Gewichtungsmoment zur Abschätzung des Lernerfolgs, was in diesem Fall heißt, dass der Umgang von Schülern mit Software nicht unmittelbare Bewertungsgrundlage ist, so könnten durch die Stimulierung affektiver und kognitiver Lernziele mittelfristig Lernerfolge eintreten. Bezüglich der hier betrachteten Software, sollte durch den Abbau von Defiziten bedingt objektiv feststellbarer Erfolg im Sinne einer Leistungssteigerung eintreten, welcher sich im Rahmen schulischer Leistungsüberprüfungen wahrscheinlich auch einstellen würde und somit eine Leistungssteigerung im üblichen Sinne impliziert.³⁷

In diesem Kontext verwende ich im Folgenden den Begriff des *formalen Lernerfolgs*, welcher aufgrund von Tests oder Aufgabensammlungen quantifizierbar bzw. beobachtbar ist. Die Substitution scheint somit gerechtfertigt, wenn zum einen für Lehrer und Lernende keine Nachteile entstehen und zum anderen hinreichend Motivationsmomente gegeben sind, um geeignete Software einzusetzen. Die Substitution scheint wünschenswert, falls sich weitere auf den Lernprozess positiv einwirkende Aspekte herausstellen, wie zum Beispiel eine Steigerung des formalen Lernerfolgs.

3.4 Beispiele für das Werkzeug Computer im Bruchrechnenunterricht

Neben Lernprogrammen, welche häufig unter der Kategorie Medium oder Tutor angesiedelt werden, haben sich in Schulen auch Werkzeuge etabliert. Um deren Potenzial abschätzen zu können, werden exemplarisch einige Einsatzmöglichkeiten der Programme Derive (stellvertretend für CAS), EXCELTM (stellvertretend für Tabellenkalkulationen) und Cabri Géomètre (stellvertretend für Geometrieprogramme) im Rahmen eines Lehrgangs zu Bruchrechnung angerissen.³⁸ Diese drei Kategorien wurden gewählt, da gerade durch sie entdeckendes Lernen unterstützt werden könnte³⁹ (vgl. [78], S. 76). Programme, welche in diese Kategorien fallen, sind im Allgemeinen *offen*. Offen bedeutet dabei, dass der User die

erbrachten Leistungen eine von der Schule festgelegte Mindestanforderungsnorm, wie immer auch diese zustande kommt, über- oder unterschreiten. (vgl. [96], S.47; aber auch [106], S. 16)

³⁶ oder auch Qualifikation und Disqualifikation.

³⁷ Siehe hierzu auch [18]. Hier wird herausgestellt, dass die Leistungsmessung in sich subjektiv geprägt ist und mehrschichtige Aspekte beinhaltet. Wird die Leistung jedoch evaluiert, macht Skalierung auf ordinalem Niveau Sinn und Leistungssteigerungen werden erkennbar. Häufig werden Notensteigerungen (5; 4+; 3-;) als Leistungssteigerung im üblichen Sinne interpretiert. Dies wird den Schülern jedoch oft nicht gerecht.

³⁸ Programme oder Rechner wie Geolog, Euklid, Maple, Mathematika, der TI-89 oder TI-92, der CASIO FX, etc. werden auch im Rahmen der schulischen Ausbildung eingesetzt und hätten genauso gut beschrieben werden können.

³⁹ Die Benutzung des Konjunktivs an dieser Stelle soll die Abhängigkeit von der Lehrperson und den sonstigen Rahmenbedingungen betonen.

Verwendung des Programms relativ frei bestimmen kann. Er ist nicht, wie z.B. bei einem Vokabellernprogramm, an enge Vorgaben gehalten (vgl. [41], S. 108).

Derive ist ein CAS. Mit ihm können Rechnungen symbolisch durchgeführt und Funktionen mehrerer Veränderlicher verarbeitet und graphisch⁴⁰ dargestellt werden. Da Derive dem Schüler die eigentliche Rechenarbeit abnimmt (vgl. [114], S. 3), soll es sogar ermöglichen, Graphen trigonometrischer Funktionen oder Differential- und Integralrechnung bereits in der Grundschule zu thematisieren (vgl. [48], S. 1). Dies soll jedoch nicht weiter hinterfragt oder gar unterstrichen werden, da keine Erfahrungsberichte vorliegen. Die Modellierung einiger Probleme wird dabei erst durch den Rechner möglich und sinnvoll (vgl. [166], S. 116). Anführen möchte ich an dieser Stelle exemplarisch das von Steinberg vorgeschlagene Trassierungsproblem (siehe [161] aber auch [166], S. 116). Probleme dieser Art sind mittlerweile relevant für den Mathematikunterricht (vgl. [125]). Wie weit CAS und andere rechnerbasierte Werkzeuge bereits in den Unterricht (hier der Sekundarstufe II) verankert sind, zeigt ein Blick in aktuelle Schulbücher. Speziell sollen hier die Werke aus dem Schrödelverlag Erwähnung finden, welche neu entwickelt und mit den 1999 in NRW in Kraft getretenen neuen Richtlinien an vielen Schulen eingeführt wurden (vgl. [33]; [34]; [125]). Während es sich dabei eher um Themenkomplexe handelt, welche der Sekundarstufe II zuzurechnen sind, sind auch durchaus Vorschläge zum Einsatz dieser Systeme in niedrigen Klassenstufen und sogar zur Begleitung der Bruchrechnung zu finden. Hole schreibt in seiner Dissertation:

„Der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen ist bereits ab dem 6. Schuljahr zur Begleitung des Bruchrechnens geeignet. Wie die nebenstehende⁴¹ Abbildung des Systems DERIVE 4.02 für Windows zeigt, können solche Instrumente u.a. zur Bestimmung des ggT (gcd=greatest common divisor), des kgV (lcm=least common multiple), zur Primfaktorzerlegung im weitesten Sinne herangezogen werden.“

([78], S. 124f)

#1:	GCD(12, 15)
#2:	3
#3:	LCM(12, 15)
#4:	60
#5:	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$
#6:	$\frac{5}{12} + \frac{8}{15}$
#7:	$\frac{19}{20}$
#8:	$\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$
#9:	$\frac{2}{9}$

Abbildung 15, Beispiel Einsatz von Derive in der Bruchrechnung,
Quelle: [78], S. 125

⁴⁰ Bei Funktionen die von bis zu zwei Variablen abhängig sind.

⁴¹ hier untenstehende.

Weitere Einsatzmöglichkeiten ergeben sich bei der Einführung und Behandlung von Geraden oder Parabeln. Schüler können hier überprüfen, ob sie Eigenschaften von Funktionen, wie Nullstellen oder y -Achsenabschnitt, rechnerisch richtig bestimmt haben. Dies können Schüler auch zu Hause vornehmen und dadurch vorzeitig mögliche Fehler oder Fehlvorstellungen bei algebraischen Umformungen (siehe hierzu [113]) selbst diagnostizieren und beheben, bzw. diese Fehlvorstellungen konstruktiv in den Schulunterricht einbringen. Zu kaum einem anderen Programm sind wohl derart viele Publikationen verfügbar. Viele mathematikdidaktische Zeitschriften der letzten Jahre enthielten Artikel zum Einsatz von Derive im Unterricht. Einige dieser Arbeiten wurden bereits angeführt. Der Lehrer könnte also auf eine breite Literaturlbasis zurückgreifen, welche sogar zum Teil auf empirischen Untersuchungen beruht (vgl. u.a. [95]). Dieser Rückgriff entspricht jedoch aus meiner Sicht noch nicht der Schulrealität.

Cabri Géomètre (für Windows) ist ein dynamisches Konstruktionsprogramm zur Geometrie. Kreise, Geraden, Strecken, etc. können hier leicht durch Anklicken konstruiert werden. Die literarische und empirische Basis zu diesem Programm ist groß (vgl. u.a. [80], [79], [38]). Nicht zuletzt sorgt die Implementierung im TI 89 und TI 92 für eine weite Verbreitung. Der Einsatz des Programms ist auf keine Jahrgangsstufe beschränkt. Das folgende Beispiel zeigt den möglichen Einsatz in der Jahrgangsstufe 6 im Rahmen der Bruchrechnung. Hier wird nach Winter eine Strecke gefünfteilt (vgl. [175]):

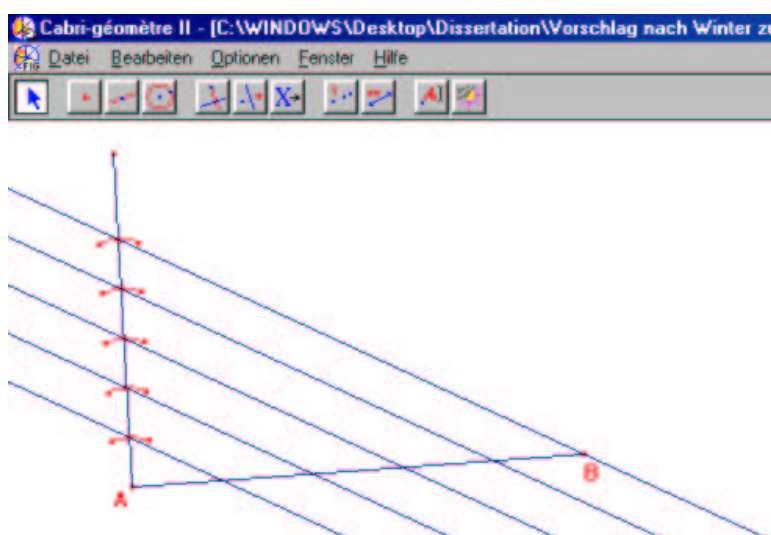


Abbildung 16, Teilung einer Strecke nach Winter in Cabri Géomètre

Cabri Géomètre ist dynamisch. Dies bedeutet, dass der Schüler, wenn ihm die entsprechende Datei und das Programm zur Verfügung stehen, sowohl die Punkte A und B als auch die Radien der Kreisbögen und den Winkel zwischen den beiden Strecken beliebig variieren kann. Somit bietet auch dieses Programm Möglichkeiten, Verständnis zu fördern. Die Unabhängigkeit konkreter Brüche von den zugrunde gelegten Strecken kann so demonstriert und erlebt werden (Ein Fünftel einer Strecke bleibt ein Fünftel. Dies ist unabhängig von deren Länge.). Haupteinsatzgebiet dieses Programms bleibt natürlich der Geometrieunterricht.

Das letzte Programm, welches hier kurz vorgestellt werden soll, ist die Tabellenkalkulation EXCELTM von MicrosoftTM. Zentrales Element von EXCELTM sind Tabellen. In ihm können dynamisch Rechnungen ausgeführt werden. Auch das Erstellen von Kreis- oder

anderen Diagrammen ist möglich. In EXCELTM kann auch mit Hilfe der Sprache Visual BasicTM programmiert werden (siehe u.a. [15]). Somit bietet dieses Programm weitreichende Anwendungsmöglichkeiten. Neben einfachen Berechnungen können durch Programmierung auch viele mathematische Anwendungen realisiert werden. Solch offene Systeme bedingen jedoch meist einen hohen Arbeitsaufwand bei der Realisierung bestimmter Unterrichtsvorhaben. Aus diesem Grund lohnt es sich auch bei diesem Programm, auf bereits implementierte oder fremde Applikationen zuzugreifen. Die folgende Abbildung zeigt ein Anwendungsbeispiel aus der Bruchrechnung:

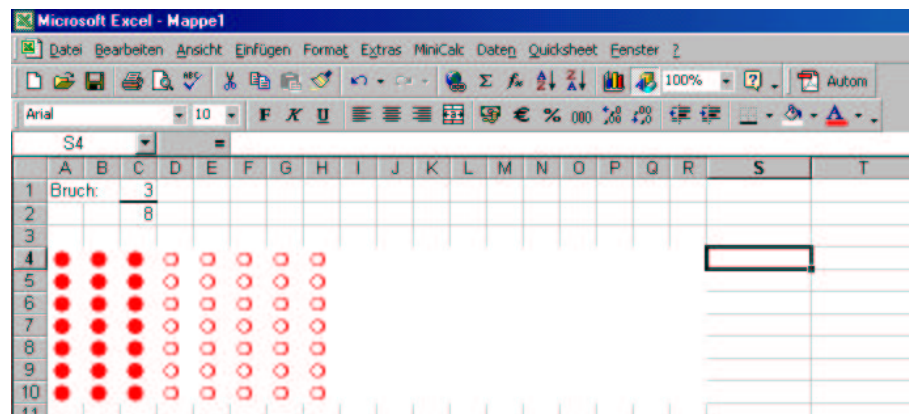


Abbildung 17, Generierung von Repräsentanten in EXCEL

In der oben abgebildeten Arbeitsmappe hat der User die Möglichkeit, durch Eingabe eines Bruchs (Hier Nenner und Zähler bis maximal 10) dynamisch einen Repräsentanten zu erzeugen. Die Möglichkeit Kreis- oder andere Repräsentanten zu erzeugen, existiert hier ebenfalls. Generell liegt der Einsatz im Rahmen der Mittel- und Oberstufe jedoch näher. Gerade bei Themen wie Stochastik oder Statistik kann EXCELTM seine Mächtigkeit zeigen. Da es sich hierbei mittlerweile um ein Standardprogramm handelt, kann von einer großen Verbreitung ausgegangen werden. Dies kann im Unterricht immense Vorteile bieten, da Schüler über solche Programme im heimischen Bereich bereits häufig verfügen.

Wie somit gezeigt wurde, bieten auch Standard-Werkzeuge die Möglichkeit, Teile der Bruchrechnung mit ihnen zu erarbeiten. Inwieweit dies zu Vorteilen führt, muss im Einzelfall entschieden werden. Im Rahmen der Rechtfertigungsproblematik spielen diese eine nicht zu vernachlässigende Rolle. Der stetig höher frequentierte Rechneinsatz im Mathematikunterricht erfordert die frühe Integration der neuen Medien. Dies scheint auch im Bruchrechnenunterricht möglich und sinnvoll. Es sollte also abgewogen werden, ob etwaige Werkzeuge punktuell in Bruchrechnenlehrgängen Vorteile gegenüber traditionellen Formen der Wissensvermittlung eröffnen.

3.5 Lernprogramme und Trainer zur Bruchrechnung, Kriterien zur Auswahl von Lernprogrammen

Am häufigsten wird der Rechner im Bereich der Bruchrechnung sicher im Heimbereich integriert. Um den Nutzen dieser Arbeitsweise empirisch untermauert abschätzen zu können, ist es notwendig, sich für ein verfügbares existierendes und weit verbreitetes Programm zu entscheiden. Dies wurde im Vorfeld durch den gezielten Vergleich von Programmen getan. Rechnergestützte Programme werden häufig nach Kriterienkatalogen bewertet. Dabei gibt es

jedoch keine standardisierten, an denen sich Eltern, Schüler oder etwaige Institute orientieren können. Vielmehr gibt es eine Reihe von Kriterienkatalogen, deren Anwendung hilfreich, aber auch mit der Gefahr von mehr oder weniger großen Ausblendungen verbunden sein kann (vgl. [100], S. 49). Eine Reihe Bewertungsschemata zur Beurteilung von Schulsoftware führen Kreutzkamp und Wolpers an. Hierzu gehören: Sodis-Datenbank, Kriterienkatalog von Lauerbach, Synopse von Kriterienkatalogen (Thome), Münsteraner Bewertungsmaske (Meissner), Kriterienkatalog des IPN und der Kriterienkatalog der Stiftung Warentest (vgl. [99], S. 291). Durch divergierende Schwerpunkte der einzelnen Kataloge kann es in den Beurteilungen zu verschiedenen Urteilen kommen, welche Kaufinteressierten falsche Fakten suggerieren (vgl. [99], S. 292). In die nähere Auswahl kamen zum Zeitpunkt der Auswahl folgende Programme:

1. Tim 7 und das Preisausschreiben in New York (Heureka Klett)
2. Bruchrechnen Schritt für Schritt (Heureka Klett)
3. Addy - spielerisch lernen Klasse 5+6 (Coktel)
4. Ali der Mathemaster (Heureka Klett)

Nachträglich wurden noch die Programme

1. Alfons Lernwelt Mathematik 5-6 (Schrödel)
2. Okidoki Bruchrechnen (Schrödel)
3. Die Mathebits (Westermann Verlag)

betrachtet. Die ersten vier genannten Programme wurden im Rahmen einer umfangreichen Arbeit analysiert und verglichen (vgl. [130], aber auch [67]). Dabei überragte das Programm Bruchrechnen Schritt für Schritt aus folgenden Gründen:

1. Die Einführungen zu einzelnen Themen sind insgesamt gut und vollständig. Der fachliche Umfang übertrifft den der anderen immens (siehe auch [130]).
2. Neben dem in der Bruchrechnung z.T. sinnvollem Practice&Drill sollten Hilfen und Kommentare geboten werden, mit denen gezielt ein Verstehen entwickelt werden kann (vgl. [100], S. 48). Das Programm Bruchrechnen Schritt für Schritt bietet gegenüber den anderen Programmen z.T. gute bis sehr gute Fehlerkommentare⁴². Dieses durchweg positive Resultat wird jedoch auch durch einige Programmfehler getrübt⁴³, welche zu falschen Analyseergebnissen führen (vgl. [130], S. 213, S. 104, S. 97).
3. Das Programm Bruchrechnen Schritt für Schritt ist das einzige Programm zur Bruchrechnung, das von Gutachtern der SODIS-Datenbank⁴⁴ als empfehlenswert eingestuft wurde.
4. Das Programm bietet als einziges neben Ali dem Mathemaster einen integrierten, „intuitiv“ zu bedienenden Formeleditor (beachte Auswertung der Schülersitzungen). Dies erleichtert und ermöglicht erst die Eingabe komplexer Terme und somit individueller Lösungen (vgl. [130], S. 161). Einige Fehlerstrategien werden erst durch das Vorhandensein eines solchen Editors erlaubt.
5. Im Bereich Multimedialmerkmale kann das Programm gegenüber den anderen aufgrund fehlender Animationen und Filme nicht überzeugen. In diesem Bereich schnitt Addy beispielsweise relativ gut ab (vgl. [130], S. 214). Näher betrachtet kann eine Anhäufung

⁴² vor allem im Bereich der Addition von Brüchen (vgl. [130]).

⁴³ Im Abschnitt zur Addition und Subtraktion von Brüchen sind solche Defizite eher selten vorzufinden.

⁴⁴ vgl. [5] unter www.sodis.de.

von multimedialen Elementen auch dazu führen, dass die Software verspielt wirkt. Der klare formale Aufbau ist dem ausgewählten Programm also zugute zu halten. Er lenkt nicht übermäßig ab und konzentriert den Blick auf das Wesentliche. Die nachträglich untersuchten Programme konnten in keinem der Punkte absolut überzeugen. Eine ausführliche Analyse wurde deshalb für sie nicht durchgeführt.

3.6 Ist die Integration des Computers in den Unterricht unumgänglich?

Vorab eine Schlagzeile der WAZ vom 15.7.2000:

Rau ruft auf zu einer neuen Bildungsreform

BERLIN (epd) Bundespräsident Johannes Rau hat neue Anstrengungen gefordert, damit der deutsche Bildungssektor mit dem Wandel in Beruf und Alltag Schritt halten könne. „Wir brauchen eine neue Bildungsreform“, sagte er in seiner Grundsatzrede vor dem Kongress des Bundesländer-Forums. Rau forderte, Bildung wieder stärker „ganzheitlich“ zu begreifen; nur wer Computertechniken kompetent und kritisch nutze, könne auf dem Arbeitsmarkt bestehen. Neue Ideen müssten sich aber auch in den öffentlichen Haushalten zeigen: Bessere Bildung koste mehr Geld. **Seite 2**

Abbildung 18, Bundespräsident Rau zur Bildung; Quelle: [170]

Ob die moderne Technik und elektronische Medien in den Unterricht integriert werden sollten, steht mittlerweile wohl außer Frage. Computer finden stetig weitere Verbreitung und sind aus dem täglichen Leben kaum noch wegzudenken. Warum sollte Schule also eine künstliche computerfreie Welt schaffen⁴⁵, mit der sich die Jugendlichen nicht mehr identifizieren können und die nicht mehr ihrer Lebensrealität entspricht (vgl. [112], S. 165). Moderne Medien müssen in den Unterricht integriert werden, um ausreichende Medienkompetenz der Schüler dauerhaft zu ermöglichen. Dies ist ein Prozess, den sowohl der Lernende als auch der Lehrende durchläuft und von stetiger Veränderung geprägt ist. Stets ist auf Aktualität zu achten, damit der Computereinsatz kein Selbstzweck wird, sondern die Zuwendung zur Realität impliziert. Diese ist mittlerweile einem stetigen Wandel und massivem Wissenswachstum ausgesetzt,

⁴⁵ „schaffen“, da oft Computer mit entsprechender Software vorhanden sind, aber nicht genutzt werden; (vgl. u.a. [151], S. 263).

welche so manche Utopie in wenigen Jahren zur Wirklichkeit werden lässt. Speziell sei hier die Integration des Internets in den Unterricht erwähnt (siehe hierzu u.a. [156]; [131]; [10]). Zitieren möchte ich hierzu Baumann, der den rechnergestützten Mathematikunterricht und auch das bereits genannte Programm Derive nachhaltig propagiert:

„Ein zeitgemäßer Mathematikunterricht ist dazu verpflichtet, Schüler und Schülerinnen mit Werkzeugen wie Derive und den durch sie möglichen Arbeitsformen vertraut zu machen. Damit wird zugleich ein Stück ‚informationstechnische Bildung‘ vermittelt: Die Schüler erfahren Möglichkeiten und Grenzen von wissenschaftlichen Systemen dieser Art und stärken damit ihre Kritikfähigkeit. Denn solchen Werkzeugen werden sie in Studium und Beruf auf Schritt und Tritt begegnen - ja sie werden sogar gezwungen sein, diese Systeme zu benutzen und jene Arbeitsformen zu praktizieren. Wer Mathematikunterricht im Stil der achtziger Jahre ausschließlich mit Papier und Taschenrechner und an den Aufgabenplantagen der herkömmlichen Schulbücher betreibt, nimmt seine pädagogische Verantwortung gegenüber der jungen Generation nicht wahr. Denn er enthält ihr Chancen des Lernens und der Persönlichkeitsbildung vor, er verweigert ihr den Erwerb von Fähigkeiten, derer sie in der modernen Welt dringend bedarf.“

([16], S. 2)

Eine Aussage, welche eher auf die Gesamtheit Schule und deren notwendigen Bezug zur gesellschaftlichen Realität abzielt, findet sich bei Bussmann und Heymann:

„Ignoriert die allgemeinbildende Schule den Computer als verändernden Faktor der gesellschaftlichen Wirklichkeit, so zieht sie sich zu Recht den Vorwurf der Weltfremdheit zu.“

([29], S. 31)

Eine Reaktion des Systems Schule repräsentiert ein Ausschnitt aus dem Bericht *Neue Medien braucht das Land*, welches im Jahre 2000 vom Landesinstitut für Schule herausgegeben wurde:

„Bis 2002 sollen in NRW alle Schulen am Netz sein, alle Lehrerzimmer werden mit einem internetfähigen Rechner ausgestattet. Medienecken in Grundschulklassen und den Einführungsklassen der weiterführenden Schulen werden zum Alltag gehören, zunehmend werden Klassen mit Notebooks für alle Schülerinnen und Schüler ausgestattet. Das sind nur einige Ziele, die sich die e-initiative.nrw gesetzt hat.“

([123], S. 24)

Diese Ziele scheinen jedoch noch stark von der Schulrealität 2001 abzuweichen. Angeführt sei folgendes Zitat aus einem Artikel von Büttner, das eine Veranstaltung über die Zukunftschancen von Lehramtsanwärtern zusammenfasst:

„(K)eine Chance zu nutzen, das kann bedeuten, sich außer guten Noten viele gefragte Zusatzqualifikationen zu erarbeiten. Ist das Internet die Eintrittskarte zum Schulhof? An den meisten Schulen fehlen schließlich ausgebildete Kräfte für den Unterricht mit neuen Medien.“

([30], S.19)

Massive Initiativen in der Lehrerfort- und Ausbildung sollten die notwendige Konsequenz dieser Ambitionen sein, um der Forderung nach Schülerorientierung und der damit verbundenen Aktualität gerecht werden zu können. Ansätze dieser Bemühungen sind bereits zu beobachten ([20], [32]), jedoch nicht selbstverständlich (vgl. [164], S. 228).

Der gesellschaftliche Druck auf Lehrer und Schule wird noch weiter steigen. Wollen Schüler nicht letztlich passiv in die Notwendigkeit der neuen Medien geraten, ist eine aktive Auseinandersetzung mit ihnen notwendig. Aufgrund der aktuellen Entwicklungen und bereits gestarteter Projekte scheint die Integration des neuen Mediums schlicht unumgänglich. Jegliche Verdrängung kann zur passiven, unreflektierten und schließlich unkontrollierbaren Konsumierung der Möglichkeiten neuer Medien führen.

3.7 Kulturgut Computerbedienung

Sowohl die Bedienung von CAS-Systemen, als auch die dynamischer Geometriesoftware müssen mit nicht geringem Aufwand erlernt werden. Unter Bezugnahme auf die Unterrichtsversuche von vom Hofe, muss abgewogen werden, ob dies Sinn macht oder nicht⁴⁶. Zur Durchführung seines Unterrichtsprojekts, musste zum einen die wöchentliche Stundenzahl des Unterrichts heraufgesetzt werden, zum anderen gab es selbst gegen Ende des Projekts noch Schüler, die das Programm nicht sicher beherrschten⁴⁷. Dabei ist zu beachten, dass dieser fast affektive Aspekt des Mathematikunterrichts stets, wenn auch in anderer Form, vorhanden war. Ich halte das Erlernen der Bedienung von Programmen durchaus vergleichbar mit dem Ablesen von Logarithmentafeln, dem Umgang mit Wahrscheinlichkeitspapier oder dem Nachschlagen von Quantilen. Auch das Umformen von Gleichungen hat zum Teil mechanischen Charakter. Dies soll die Gefahren des vorschnellen Einsatzes von Software jedoch nicht herunterspielen. Der Einsatz sollte behutsam und gut überlegt erfolgen.

Die Bedienung von Computern können nur wenige umgehen (Eine dieser Personen-gruppen sind, fatalerweise, Lehrer). Zu dem was Schüler können sollten, wie sie diese Fertigkeiten erlernen können und welche organisatorischen Rahmenbedingungen möglicherweise zugrunde gelegt werden könnten, führt Burger folgendes an:

- *„Was müssen die Schüler können?
Die nötigen Handhabungsfertigkeiten ergeben sich aus der an der Schule zur Zeit tatsächlich vorhandenen und in der Eingangsstufe eingesetzten Hard- und Software.*
- *Wie sollen sie diese Fertigkeiten erlernen?
Hier ist zu entscheiden, ob die Einführungsveranstaltung im Rahmen des stundenplanmäßigen Unterrichts oder im Rahmen von Projekttagen erfolgen sollen.*
- *Wer soll die Veranstaltung durchführen?
Hier ist entsprechend der Lehrverteilung zu klären, ob die jeweiligen Fachlehrer der Klasse die Einführung selbst durchführen können und wollen oder ob sie von anderen Lehrkräften, z.B. dem ITB-Team durchgeführt werden sollen.“*

(entnommen [28], S. 49)

⁴⁶ vom Hofe benutzte das Programm MATH-VIEW (vgl. [74]).

⁴⁷ vgl. [74], S. 88 : "Systemschwierigkeiten stellen auch in fortgeschrittenen Stadien eine weitere Fehlerquelle dar. Das Beheben der damit verbundenen Probleme erfordert Zeit, die im traditionellen Unterricht für andere Dinge verwendet werden kann."

Burger spielt somit auch auf eine Konzeption an, welche die frühe Erlernung der Computerbedienung propagiert. Wenn Computereinsatz im Unterricht, dann so früh wie möglich. Hierfür gibt es mehrere Gründe. So wissen z.B. Schüler ohne ein Programm zu kennen nicht, wann dessen Einsatz gewinnbringend sein könnte. Oder anders: Um Werkzeuge nutzen zu können, muss man sie kennen.

Betrachtet man Werkzeuge wie MS-WordTM, Derive oder EXCELTM, so ist klar, dass gewisse Fertigkeiten zu deren Bedienung erlernt werden müssen. Trotzdem ist dies nicht bei jedem Programm gerechtfertigt.

„Der Stand der Technik erlaubt heute eine Gestaltung von Programmen, die absturzsicher funktionieren, leicht zu installieren sind und bei einer Deinstallation (Entfernen des Programms) keinen Datenmüll auf dem Rechner hinterlassen. Ein Programm zeigt in den meisten Fällen bereits erhebliche Schwächen, wenn es auf breite PC-Kenntnisse aufbaut. Der Umfang der schriftlichen Handreichung steht damit im umgekehrten Verhältnis zu seiner Qualität. Wer erst mühsam viele Seiten lesen muss, um sich im Bruchrechnen zu üben, der sollte seine Zeit gewinnbringender mit Papier und Bleistift übenderweise verbringen. Eine technische Handhabung muss intuitiv erfolgen können.“

([112], S. 170)

Ist ein Programm bereits eng angelegt, d.h. es hat im Wesentlichen kaum Werkzeugcharakter, so sollte dessen Bedienung intuitiv erlernbar sein. Ob dies der Fall ist, zeigt sich erst, wenn man Personen mit unbekannten Programmen konfrontiert und sie nach kurzer Zeit sich selber überlässt. Ähnlich wurde bei der Untersuchung zum Programm Bruchrechnen vorgegangen. Die Häufigkeit der Fehlbedienungen stellt dabei ein Maß für die Bedienungskomplexität aus der Sicht der Probanden dar. Unnötige Komplexität sollte in Programmen natürlich stets vermieden werden, obwohl den meisten Werkzeugen eine solche zugeschrieben werden muss⁴⁸. Der Nutzen der Einführung muss stets gegenüber möglichen Nachteilen abgewogen werden. Meist sind jedoch massive Reduktionen möglich, da der volle Umfang von Programmen wie Derive oder Maple den meisten Nutzern ohnehin verschlossen bleibt.

Der Rechnereinsatz sollte von der Grundschule beginnend systematisch vorgenommen werden. Schüler können genetisch die Rechnerbedienung erlernen, wobei der Einsatz nicht auf den Mathematikunterricht beschränkt bleiben sollte. Auch Fächer wie Deutsch, Erdkunde oder auch Religion sollten ihn integrieren und den Schülern so zum einen die Rolle des Mediums Computer aufzeigen, zum anderen Gelegenheiten eröffnen Wissen zu vernetzen und fachübergreifend zu arbeiten. In diesem Sinne wird das Erlernen der Computerbedienung mittelfristig von den meisten Schülern erlernt werden und nach meiner Einschätzung allmählich zum Kultur- bzw. Volksgut. Maßnahmen, Erwachsenen nachträglich die PC- und Internetbedienung nahe zu bringen, sind mittlerweile Elemente der Politik. Die unbedingte Fähigkeit zur Nutzung und Bedienung der neuen Medien und weltumspannender Datennetze, soll auf diesem Wege allen eröffnet werden. Schule muss, wenn sie auf die (eine) Zukunft ihrer Schüler baut, Konzepte zur informationstechnologischen Ausbildung entwickeln, durchführen und für die Stabilisierung und Aktualisierung der Kenntnisse und Fertigkeiten sorgen.

⁴⁸ Viele etablierte Programme sind meist umfangreich und komplex, um möglichst viele mögliche Nutzer anzusprechen.

3.8 Ausblick: Lernen, Bruchrechnen und Internet



Abbildung 19; Werbebanner Klett, Quelle: [8]

Beschrieben wurde bereits, wie Schülerdefizite womöglich in Zukunft diagnostiziert werden könnten. Ebenfalls wurden Argumente für die Notwendigkeit der Rechnerintegration angeführt. Schließlich ist es jedoch noch ein weiterer Schritt, Rechner zu vernetzen und somit einen Komplex zur Modellierung von neuartigen Lernumgebungen zu schaffen. Zu Beginn dieses Abschnitts sei folgendes Zitat angeführt:

„Vernetzte Computer dringen in alle Bereiche von Schule vor, was nicht nur wünschenswert, sondern nahezu notwendig und deshalb auch politisch gewollt ist.“

([28], S. 48)

Doch welche Möglichkeiten könnten sich hier eröffnen? Vernetzte Computer und speziell das Internet, können Präsentationsflächen für den Unterricht bieten (vgl. [131]) oder auch zur Vernetzung und Darstellung von Wissen genutzt werden (siehe u.a. [119]). Auch enaktive Unterrichtsphasen könnten durch Multimedia unterstützt werden⁴⁹. Die Vielzahl verfügbarer Applets steigt ständig. Auch kommerzielle Anbieter haben den Markt mittlerweile für sich entdeckt. Abbildung 19 zeigt eine Onlinewerbung des Klett-Verlags. Auch hier wird mit dem Rechner Spaß beim Lernen suggeriert. Organisatorisch werden die meisten Lernportale so gestaltet, dass Schüler per Mail Fragen stellen können, die sie dann durch Lehrkräfte beantwortet bekommen. Aber auch Chats stellen mögliche Angebote dar (vgl. [51]). Gemein ist diesen Angeboten jedoch, dass der Schüler mit dem Tutor in Standardtext kommunizieren muss. In Bezug auf die Bruchrechnung hat dies zur Konsequenz, dass der Schüler Strategien entwickeln muss, um mit Hilfe von Termen mit dem Onlinelehrer eindeutig kommunizieren zu können. Ein Vorteil dieser Angebote bleibt natürlich der Kontakt mit Menschen. Da der Lehrer nicht vor Ort ist, werden weitere scheinbar positive Eigenschaften solcher Lernportale häufig hervorgehoben:

- Schüler sind mutiger und geben eher Schwächen zu.
- Schüler haben jederzeit Gelegenheit, Fragen zu stellen.
- Schüler können Lehrer jederzeit durch ein Ranking abwählen.

(vgl. [51])

Ob diese sogenannten Vorteile letztendlich wirklich Vorteile sind, sei dahingestellt. Dagegen ließen sich Argumente anführen wie, dass Schüler keine Courage entwickeln, nicht angehalten

⁴⁹ Der Begriff enaktiv soll hier etwas weiter gefasst werden. Häufig wird mit ihm das Basteln, verschieben oder stapeln von Gegenständen verbunden. Eine kognitiv-psychomotorische Kopplung im Sinne enaktiver Schülerarbeit besteht aus meiner Sicht jedoch auch, wenn Schüler z.B. mit der Maus virtuelle Gegenstände verschieben.

werden, länger über Probleme nachzudenken oder bei ihrer Lehrerwahl Kriterien zugrunde legen, die mit dem ursprünglichen Ziel des Angebotes nichts mehr zu tun haben. Um positive gegen negative Gesichtspunkte gewichten zu können, wäre sicher eine tiefergehende Untersuchung notwendig. Aus diesem Grund unterbleibt auch eine Einschätzung der Effektivität von Online Lernportalen. Fakt ist hingegen, dass solche Lernportale schon lange (zumindest seit 1998) von Lernsoftwareherstellern angeboten werden (vgl. [130]). Der Zugang und die Nutzung war zum damaligen Zeitpunkt mit Problemen behaftet. In zyklischen Abständen tauchen diese Angebote wieder auf. Mir ist jedoch **kein** Schüler bekannt, der eines dieser Angebote nutzt.⁵⁰ Doch auch dies soll nicht mögliche Zukunftschancen des Internets als Medium zum Lernen einschränken. Issing, Professor für Medienforschung an der FU Berlin, prognostiziert:

„Der Bildungsmarkt wird zunächst die Nachhilfe, dann die Hochschulen und später den gesamten Schulbereich erfassen. Bis 2020 wird die allgemeine Schulpflicht durch eine Nachweispflicht über den erreichten Bildungsstand ersetzt sein.“

(entnommen [51], S. 154)

Aus meiner Einschätzung wird das Internet seine Rolle bis zu diesem Zeitpunkt maßgeblich verändern. Portable Geräte werden wahrscheinlich stärker in den Vordergrund rücken und zur Kommunikation genutzt. Um ein weiteres Beispiel für eine euphorisch eingeführte Technik zu nennen, seien Bildtelefone angeführt. Trotz der technischen Möglichkeit und relativ günstiger Preise hält sich deren Verbreitung in Grenzen. Das System Schule verhält sich insgesamt noch konservativer. Die folgende Anekdote von Tapscott unterstreicht das:

„If school officials frozen 300 years ago came alive today and looked at their professions – a physician in an operating theater, a pilot in a cockpit, an engineer designing an automobile in cyberspace – they would marvel at how technologies had transformed work. But if they walked into most classrooms or lecture halls, they would no doubt be comforted that nothing was different.“

(entnommen [10], S. VIII)

Ebenso wie Lernprogramme stehen und fallen Online Diagnosen mit der Qualität von Editor und Diagnosealgorithmus. Ähnlich wie ein Lernprogramm, das Fehler nicht weiter hinterfragt, besteht auch für den Onlinelehrer die Gefahr, eine falsche Diagnosen zu stellen und ähnlich wie schlechte Lernprogramme Fehlvorstellungen zu begünstigen. Ideal wäre für mich ein System, das zum einen Aufgaben gemäß eines vorgegebenen Diagnosealgorithmus auswählt und diese Aufgabenauswahl im Anschluss einem Onlinelehrer zukommen lässt, der die Diagnose des Programms überprüft und ggf. nochmals mit dem Schüler in Kontakt tritt. Davon sind jedoch sowohl Schüler als auch die Unternehmen noch weit entfernt.

⁵⁰ Ich bin seit 2000 im Schuldienst tätig und habe sowohl in Klassen der Sekundarstufe I als auch in Kursen der Sekundarstufe II gezielt nach der Nutzung solche Angebote gefragt.

Konkretisierung der Fragestellung, Ziel der Untersuchung

4 Konkretisierung der Fragestellung, Ziel der Untersuchung, Probandenauswahl

Zur Frage nach dem Nutzen von Nachhilfeunterricht existieren bereits empirische Untersuchungen (vgl. u.a. [19], S. 90). Übungseinheiten, deren Sinn und Nutzen im Rahmen der Bruchrechnung sicherlich nicht von der Hand zu weisen sind, sind übliche Bestandteile des Mathematikunterrichts (siehe hierzu auch [101], Kapitel 5; [177], S. 77-90). Bereits angeführt und erläutert wurde die Möglichkeit, traditionelle Methoden durch rechnergestützte zu substituieren. Es scheint durchaus denkbar, dass Rechner einige Aufgaben des Lehrers übernehmen oder den Schüler beim Lernen unterstützen. Inwieweit übliche Lernprogramme zur Bruchrechnung hierzu geeignet sind, ist jedoch unklar. Es ergibt sich folgende Kernfrage:

Kernfrage:

Kann der unterrichtsbegleitende Einsatz des Programms Bruchrechnen⁵¹ gerechtfertigt werden?

Diese geschlossene Frage ist insofern offener zu verstehen, als dass man „das Programm Bruchrechnen“ gegen „Programme der Art Bruchrechnen“ ersetzen könnte. Um konkrete Beobachtungen vornehmen zu können, war es natürlich notwendig, ein konkretes und existierendes Programm auszuwählen. Im Rahmen der Rechtfertigungsproblematik sehe ich jedoch durchaus exemplarische Ansätze, die sich auf andere Programme übertragen lassen. Im empirischen Teil dieser Arbeit wird eine Beschränkung auf den Nachmittagsmarkt vorgenommen. Es wird nicht zuletzt aus diesem Grund davon ausgegangen, dass der Rechner primär zur Beseitigung bereits entstandener Defizite genutzt wird. Kann ein Programm diesem Anspruch jedoch gerecht werden?

Leitfrage I:

Kann ein Lernprogramm zur Bruchrechnung bei Schülern vorhandene Defizite beseitigen, beziehungsweise zu deren Beseitigung beitragen?

Um diese Leitfrage, die sicher einen großen Teil der Rechtfertigungsproblematik beinhaltet⁵², zu beantworten, ist die Kenntnis oder Beobachtung des Lernprozesses der Schüler **nicht notwendig**. Es reicht die Überprüfung durch Aufgabensammlungen. Die Diagnose von Defiziten und deren Behebung finden dann auf identischem Niveau statt. Es bleibt jedoch die Beschränkung auf formalen Lernerfolg. Um den Kritikern von Lernprogrammen – Seymour Papert sei nochmals hervorgehoben – gerecht werden zu können, soll auch überprüft werden, ob die Defizite durch Drill, also dem stetigen Wiederholen bestimmter Aufgabentypen beseitigt wurden oder ob der Schüler versucht, sein nicht mehr vorhandenes Wissen zu rekonstruieren und aktivere Möglichkeiten des Lernens nutzt. Folgende Leitfrage soll der Forderung nach sinnvollem Lernen, also dem Versuch benutzte Kalküle zu verinnerlichen, gerecht werden:

⁵¹ Hier: Bruchrechnen Schritt für Schritt, Heureka Klett.

⁵² Sowohl Schüler, Eltern als auch Lehrer räumen dem formalen Lernerfolg einen großen Stellenwert ein. Werden Defizite behoben, werden vielerlei positive Entwicklungen angeregt. Nicht nur, dass Schüler bessere Noten bekommen, sondern auch das Verständnis aufbauenden Unterrichts kann gefördert werden. Wenn es ein Programm also schafft, Defizite zu beheben, so bringt es Nutzen gegenüber dem Ist-Zustand und liefert so ein Indiz zur Rechtfertigung seines Einsatzes.

Leitfrage II:

Können Schüler in Einzelarbeit sinnvoll mit einem Programm zur Bruchrechnung arbeiten? Wo liegen die Probleme, wo die Perspektiven und wie sind diese im unterrichtlichen Kontext zu gewichten. Welche Aussagen lassen sich über den Umgang von Schülern mit einem Programm zur Bruchrechnung formulieren?

Zwischen den Antworten der beiden hier formulierten Leitfragen vermute ich Abhängigkeiten. So scheint es wichtig zu erfahren, ob es äußere Faktoren oder Parameter gibt, welche den (formalen) Lernerfolg bestimmen, hemmen oder fördern. Es soll untersucht werden, ob aus dem Verhalten des Schülers beim Umgang mit einem Programm zur Bruchrechnung prognostiziert werden kann, dass er bei der Bearbeitung einer Aufgabensammlung erfolgreich ist.

Auch affektive Aspekte spielen eine wichtige Rolle im Rahmen der Rechtfertigungsproblematik. Die Frage, welchen Eindruck das Programm auf die Schüler subjektiv macht und ob überhaupt Bereitschaft besteht, traditionelle Methoden zu substituieren, ist aus diesem Grund nicht minder wichtig. Dieser Frage wurde durch eine Schülerbefragung nachgegangen.

4.1 Probandenauswahl

Die Probanden sollten einer geeigneten Menge von Personen entnommen werden, welche Defizite im Bereich der Bruchrechnung haben. Um den Umfang der Untersuchung in akzeptablen Grenzen zu halten und für die Probanden tragbare Bedingungen zu schaffen, sollte ein Gebiet der Bruchrechnung ausgewählt, ausgeklammert und separiert betrachtet werden. Dies ist nicht zuletzt deswegen gerechtfertigt, da verschiedene Rechenfertigkeiten bei Schülern auf verschiedenen Fähigkeiten beruhen (vgl. [66]) und diese scheinbar separiert kognitiv fixiert sind. Um sich nicht bereits vorab auf eine Rechentechnik festzulegen, wurde ein Aufgabensammlung zusammengestellt, die sich zum einen auf Aufgaben aus üblichen Schulbüchern beschränkt und zum anderen viele verschiedene Fertigkeiten und Fähigkeiten berücksichtigt und abfragt. Im Anschluss wurden die Testergebnisse von 244 Schülern⁵³ explorativ ausgewertet (vgl. [66]). Wie erwartet, tauchten übliche Schülerfehler (vgl. [128]) auf. Aus diesen wurde ein charakteristischer ausgewählt und die Schüler gemäß desselben selektiert. Auf ein fast eindeutiges Fehlermuster lässt sich die Addition von Brüchen gemäß der Strategie $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ zurückführen. Fehler dieser Art sind Folgen von bestimmten Fehlvorstellungen oder falsch gelernten Regeln und treten nicht zufällig, sondern systematisch auf (vgl. [62]). Die Selektion beschränkte sich also auf Schüler mit einem Defizit im Bereich der Addition von Brüchen.⁵⁴ Insgesamt wurden so 21 Schüler ausgewählt und eingeladen, sich innerhalb der Universität mit einem Programm zur Bruchrechnung auseinander zu setzen. Um den Aufwand für die Schüler und ihre Familien in tragbaren Grenzen zu halten, wurde die Zahl der notwendigen Besuche auf ein bis zwei beschränkt. Selbst bei dieser recht kleinen Anzahl von Besuchen kam es zu zum Teil immensen organisatorischen Problemen. Die Resonanz auf die Einladung war unter Beachtung der Rahmenbedingungen groß⁵⁵. Sechzehn Schüler nahmen an der Studie aktiv teil. Lediglich fünf Schüler, bzw. deren Eltern sagten vorab aus

⁵³ Es handelte sich bei den Schülern um Kinder aus den siebten Klassen von Gymnasien.

⁵⁴ weitere Defizite werden dabei nicht explizit ausgeschlossen.

⁵⁵ Die Untersuchung fand innerhalb der Universität statt und die Zeiten lagen im Freizeitbereich der Jugendlichen.

Desinteresse, Unverständnis oder Zeitmangel ab. Zwei Schüler führten nur eine Sitzung durch und verzichteten aus organisatorischen oder verständlichen persönlichen Gründen auf eine zweite. Eine dieser Einzelsitzungen wurde dabei von zwei Schülern gleichzeitig wahrgenommen und bleibt deswegen im Weiteren unberücksichtigt.⁵⁶ Da für jeden Probanden mit Vor- und Nachbereitung der jeweiligen Sitzung fünf bis sechs Stunden nötig waren und auch die Termine der Probanden ausschließlich in den Nachmittagsstunden lagen, ergab sich eine Dauer von ungefähr drei Monaten für die Datenerfassung, also dem Erstellen der Videobänder.

Abschließend eine Zusammenfassung der Daten zur Probandenauswahl:

- Aus einer Menge von 244 Schülern wurden 21 mit Hilfe einer Aufgabensammlung ausgewählt.
- Von den 21 geladenen Schülern nahmen 16 an der Videostudie teil.
- 15 der Schüler wurden in Einzelsitzungen mit dem Programm konfrontiert.

Um den Umgang von Schülern mit dem Programm zu charakterisieren, wurde eine spezielle Lektion ausgewählt, welche die meisten Schüler in der ersten Sitzung bearbeiteten. Es handelte sich um die Lektion zur Addition von Brüchen (vgl. Abschnitt 7.1 dieser Arbeit). Auf den Gang der Untersuchung und die jeweils erhobenen Daten wird in den Abschnitten 5.2 bzw. 5.3 näher eingegangen.

⁵⁶ Der zweite Schüler ist spontan hinzugekommen und gehört nicht zu den geladenen 21 Personen, Durchführung wäre in akuter Situation jedoch sonst nicht möglich gewesen.

Protokollierungssystem zur Auswertung von Schülereinzelsitzungen

5 Protokollierungssystem zur Auswertung von Schülereinzelsitzungen

Ein Problem beim Einsatz von Protokollierungssystemen, wie Tonband oder Videokamera zur Dokumentierung von Rechnersitzungen, ist die Einseitigkeit des im Anschluss zur Verfügung stehenden Materials. Gängige empirische Untersuchungen zum Rechnereinsatz bemühen die Handlungen des Schülers aus der Aufnahme des Bildschirms zu entschlüsseln (vgl. u.a. [74]). Die Qualität solcher Bildschirmabbildungen lässt jedoch häufig zu wünschen übrig. Ziel war es, ein geeignetes System zu entwickeln, welches möglichst kompromisslos die synchrone Aufnahme von Arbeitsbildschirm, Probanden, Ton von System und Probanden und einer Uhr, welches die Ereignisse auf dem Band eindeutig lokalisierbar macht, ermöglicht. Um die Erfahrungen von Profis auf dem Gebiet der Bildverarbeitung zu nutzen, trat ich in Kontakt mit dem Medienzentrum der Universität Essen. An dieser Stelle möchte ich Herrn Wassermann besonderen Dank aussprechen, der bei der Ausarbeitung der Protokollierungsgrundlagen entscheidende Vorschläge lieferte und auch die technische Realisation mit Rat und Tat begleitete. Hinreichend geeignet erschien also ein System, welches folgendem Schemata genügt:

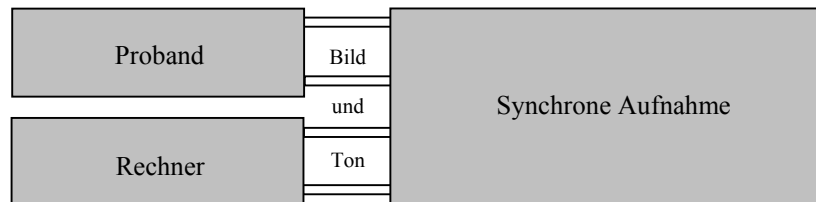


Abbildung 20, Protokollierungsschema

Die technische Realisierung war zum einen bedingt von der Menge der zur Verfügung stehenden Mittel, welche in Hinsicht auf die komplexe Aufgabenstellung nicht ausreichend schienen, zum anderen vom Wunsch der möglichst genauen Protokollierung. Aus diesem Grund wurden die Schnittstellen, im Sinne eines Kompromisses, wie folgt konstruiert:

a) Bild des Probanden

Das Bild des Probanden wurde mit einer digitalen Videokamera der Marke Panasonic AG-EZ 1 erzeugt und durch eine TV-Grabberkarte Magic TV-View der Firma MagicXpress auf dem Bildschirm eines Zweitrechners ausgegeben.

b) Ton des Probanden, Ton des Systems

Da die Klänge des Probandensystems über Lautsprecher ausgegeben wurden, reichte es aus, ein Mikrofon im Raum zu platzieren. Zur Verfeinerung der Aufnahme hätten die beiden Kanäle (links und rechts) getrennt aufgenommen werden können. Da die Klänge des Systems jedoch in diesem Fall stark beschränkt waren, wurde hiervon Abstand genommen. Das Signal des Mikrofons wurde ebenfalls in den Zweitrechner gespeist.

c) Aufnahme des Probandenbildschirms

Um die Inhalte des Probandenbildschirms möglichst genau und detailgetreu festhalten zu können, kam nur eine vollends digitale Lösung in Frage. Letztendlich fiel die Entscheidung auf das Remote-Access-System VNC⁵⁷. Zum einen ist diese Freeware und somit nicht mit Kosten

⁵⁷ Virtual Network Computing, by AT&T, 1999.

verbunden, zum anderen zeichnet sich die Software durch eine vergleichsweise hohe Qualität aus. Die Software ermöglicht das netzwerkinterne, digitale Grabben von Bildschirmhalten. Zur Protokollierung wurde das gegrabte Bild auf einen Zweitrechner übertragen.

5.1 Synchronisation und Einspielung des Timers

Auf dem Bildschirm des Zweitrechners finden sich somit alle notwendigen Ton- und Bild-Informationen. Durch geschickte Anordnung der Fenster und Einspielung der Uhr TS-Uhr (Shareware, kann im WWW bezogen werden) gelang dann folgender Bildschirmaufbau:



Abbildung 21, Zusammengeführte Fenster

Um die Ereignisse einer Sitzung nachvollziehen zu können, musste das Videosignal des Zweitrechners auf ein Video-, Audiosystem ausgegeben werden. Hierzu stand ein S-VHS Rekorder⁵⁸ zur Verfügung. Als Bildmaterial wurden 4-Stunden Kassetten⁵⁹ verwandt. Der Bildschirminhalt des Zweitrechners wurde mit Hilfe einer S-VHS-Anbindung der Video-Out fähigen Grafikkarte⁶⁰ auf das Videogerät übertragen. Der Ton wurde von der Soundkarte⁶¹ sowohl aufgenommen, als auch gemischt und wiedergegeben. Um das Bild des Rechners und somit den Probanden auch von anderen Rechnern beobachten zu können, mussten kleine Abstriche bei der Bildwiederholungsrate⁶² des Kamerabildes gemacht werden. Der Vorteil überwog jedoch in der konkret geplanten Anwendung. Schematisch ergab sich somit folgende Lösung:

⁵⁸ Hersteller: S-VHS Recorder Panasonic; Modell: AG7350 [S-VHS ist Bezeichnung für einen Videostandard].

⁵⁹ Hersteller: TDK, Modell TV 240.

⁶⁰ Hersteller: Miro, Modell: miroCRYSTAL DVD.

⁶¹ Soundblaster PCI.

⁶² Auf den Halbbildmodus musste verzichtet werden.

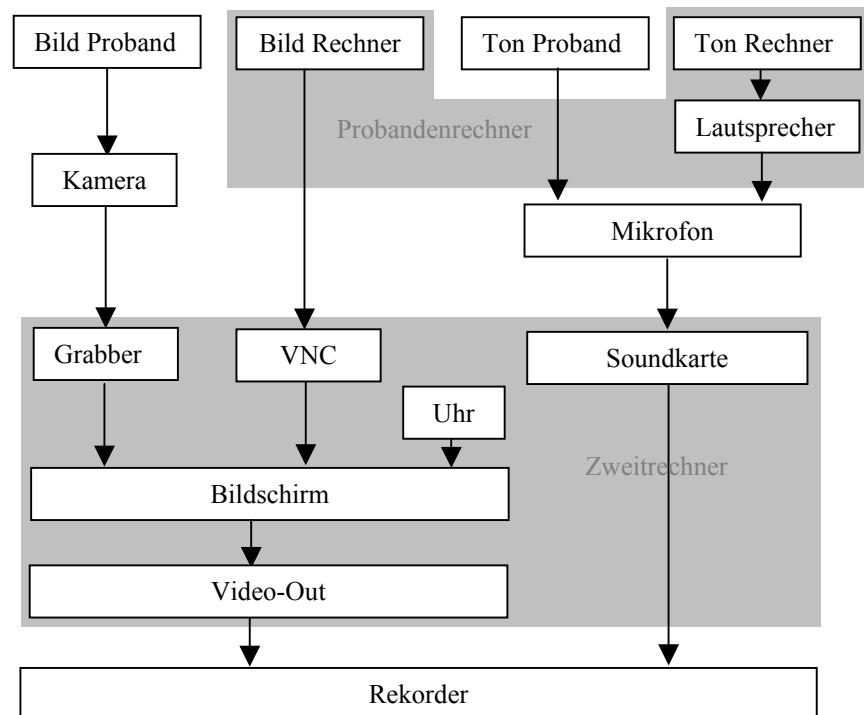


Abbildung 22, schematische Darstellung Protokollierungssystem

Das Bild des zweiten Rechners kann mit Hilfe der VNC-Schnittstelle an beliebige vernetzte Arbeitsplätze gegrabbt werden und ermöglicht so die Überwachung des Bearbeitungsstatus. Vorteil des Systems ist die hohe Detailtreue der Aufnahmen. Eingaben, sowohl von Tastatur als auch von Maus, der Bildschirminhalt, ein Bild des Probanden und sogar etwaiger Ton wurden in ausreichender Qualität aufgezeichnet. Die Qualität hätte noch wie folgt verbessert werden können:

1. Verwendung eines professionellen Richtmikrofons. Das verwandte Kohlekörnermikrofon zeigte im Allgemeinen keinen ausgeglichenen Frequenzgang und erzeugt ebenfalls z.T. Störgeräusche, welche jedoch die Verständlichkeit nur teilweise beeinflussten. Vorteil des verwandten Mikros ist seine Unauffälligkeit, welche Schüler schnell zu normalen Verhalten übergehen lässt.
2. Durch die Verwendung von S-VHS Kassetten oder anderen hochwertigeren Systemen kann die Qualität immens verbessert werden. Auch diese standen aus Kostengründen nicht zur Verfügung.
3. Durch den Verzicht auf die Kontrollfunktion über ein LAN oder die Installation zusätzlicher Monitore, könnte das Probandenbild hochfrequentierter aufgezeichnet werden. Da das Verhalten der Schüler jedoch nicht absehbar schien, war die Kontrollfunktion notwendig.

Nachteilig stellt sich der immense Aufwand dar, welcher bei der Beobachtung von mehreren Schülern nötig wäre. Nur durch einen großen zusätzlichen technischen Aufwand lassen sich

parallel Aufnahmen erzeugen, welche dann noch hinreichend gut synchronisiert werden müssten. In diesem Fall eignen sich sicher Systeme wie das von Wiegand vorgeschlagene "ScreenScam" (vgl. [172]), welches Tastatur und Bildschirmeingaben der Probanden protokolliert. Auch hier sind jedoch ausreichende technische Möglichkeiten notwendig und trotz zusätzlicher Videodokumentation müssten große Abstriche gemacht werden (vgl. [172]). Ebenfalls nicht unproblematisch ist die nachträgliche Auswertung. Transkribierung macht ab einem gewissen Umfang keinen Sinn mehr, da die schriftliche Darstellung nicht allen Vorgängen gerecht werden kann. Reduktionen müssen in Kauf genommen werden. Dies ist auch im durchgeführten Projekt sinnvoll. Vor allem das Beschreiben von Mausbewegungen kann nie vollständig erfolgen. Für vollautomatisierte audiovisuelle Protokollierungssysteme besteht noch großer Entwicklungsbedarf, welcher sicher nicht in absehbarer Zeit gedeckt werden kann.

5.2 Gang der Untersuchungen

Die Sitzungen wurden vorab nur grob strukturiert. Sie beinhalteten die Bearbeitung der Kapitel zur Addition und Subtraktion (vgl. Kapitel 7). Die Schüler erhielten eine kurze Einführung, welche auf einem anderen Programmabschnitt (Was ist ein Bruch?) basierte und lediglich zur Erläuterungen der Programmbedienung diente. Um bei den Probanden für ähnliche Voraussetzungen zu sorgen, wurden der Gang der Einführungen mit Hilfe einer Checkliste protokolliert und etwaige Abweichungen notiert. Die Schüler erhielten nach der Einführung eine auf der Lernwegkontrolle des ersten Programmabschnitts basierende Aufgabe und wurden im Anschluss mit dem System alleine gelassen. Nach ungefähr 20-40 Minuten wurde jeweils nochmals nach Bedienungsproblemen gefragt. Die Schüler hatten ebenfalls die Möglichkeit, jederzeit um Hilfe zu fragen. Dabei wurden nur Fragen zur Programmbedienung ausführlich geklärt, fachliche Fragen eher ignoriert oder auf Möglichkeiten des Programms verwiesen. Die Sitzung wurde entweder beendet nachdem ein Schüler das entsprechende Pensum geschafft hatte oder nach maximal 3 Unterrichtsstunden (2 1/4 Stunden). In einigen Fällen wurde mit Rücksicht auf den Schüler bereits vorzeitig abgebrochen. Die zweite Sitzung war aufgeteilt in einen rechnergestützten und einen nicht rechnergestützten Teil. Die Schüler hatten zum einen die Möglichkeit, zu Beginn der zweiten Sitzung Versäumtes der ersten nachzuholen oder direkt in den Übungs- und Testmodus zu gehen. Auch hierzu gab es eine Checkliste, welche akribisch abgearbeitet wurde, um die Schüler mit identischen Voraussetzungen in die jeweiligen Tests und Programmteile einzuführen. Nachdem die Schüler vorab nochmals Aufgaben mit Hilfe des Rechners üben konnten, sollten sie selber entscheiden, ob sie diese nach einiger Bearbeitungszeit hinreichend beherrschen, um anschließend in den Testmodus zu wechseln. Nach Beendigung des Testmodus und dem Erhalt einer vom Rechner hierfür gegebenen Note, wurde die rechnergestützte Phase beendet, um einen Nachtest, welcher schriftlich ohne weitere unterstützende Medien zu lösen war, seitens der Schüler bearbeiten zu lassen. Dieser wurde dann im unmittelbaren Anschluss direkt mit den Schülern besprochen. Etwaige Fehler seitens der Schüler wurden hinterfragt, um entscheiden zu können, ob falsche Ergebnisse von einer Fehlvorstellung resultieren oder lediglich auf spontane Vorgehensweisen zurückzuführen sind. Der Nachtest beschränkte sich ebenfalls auf die Addition und Subtraktion von Brüchen und wurde zum größten Teil den analytischen Tests Padbergs entnommen (vgl. [128]).⁶³ Abschließend sollten die Schüler die Arbeit mit dem PC reflektieren und beurteilen. Hierzu wurde ein Fragebogen entwickelt, in welchem die Schüler anhand von Rating-Skalen, die im

⁶³ Siehe auch Abschnitt zum Anschlussstest in dieser Arbeit.

Wesentlichen dem traditionellen Notensystem entsprechen, ihre Eindrücke und Meinung niederschreiben konnten.

5.3 Datenerhebung

Somit lagen nach Durchführung der Untersuchungen folgende Daten von den Probanden vor:

- (i) In Schulen ausgeteilte und ausgewertete Aufgabensammlung
- (ii) Datenblatt der Probanden mit persönlichen Daten, PC-Gewohnheiten und Notenentwicklung
- (iii) Checklisten zur Dokumentierung des Untersuchungsablaufs
- (iv) Videoaufzeichnungen der Schülersitzungen
- (v) Aufgabensammlung zur Addition und Subtraktion (Nachtest)
- (vi) Beurteilungsbogen der Schüler

Einen zentralen Punkt bilden die Videoaufzeichnungen der Probanden. Um eine gleichbleibende Qualität der Bänder sichern zu können und keine Nachbesserungen vornehmen zu müssen, wurden vorab mehrere Testdurchläufe mit Probanden vorgenommen. Die textbezogene Protokollierung der eigentlichen Untersuchung wurde zum einen auf die erste Sitzung, zum anderen lediglich auf eine Lektion beschränkt. Die Beschränkung auf die erste Sitzung begründet sich darin, dass eine große Menge an Daten zur Verfügung stand, die in ihrer Gesamtheit den Rahmen dieser Arbeit gesprengt hätten. Des Weiteren werden die Protokolle hauptsächlich eingesetzt, um Probandenverhalten miteinander zu vergleichen. Da Gang und Inhalt der Untersuchungen zur zweiten Sitzung bereits eine hohe probandenbezogene Heterogenität aufwiesen, sind Vergleiche hier noch schwer möglich. Trotzdem wurden die Bänder nochmals gesichtet, um mögliche Besonderheiten nicht untergehen zu lassen. Die Beschränkung auf die Lektion zur Addition von Brüchen liegt in der Vergleichbarkeit von Arbeitswegen und der Struktur dieser Lektion begründet. Es ist in diesem Bereich die einzige Lektion, die einen größeren Umfang hat und das streng lineare Vorgehen des Probanden fordert und auf die Probe stellt.

Um die entsprechenden Bänder zur Auswertung aufzubereiten, waren einige Nacharbeiten notwendig. Folgende Schritte wurden dabei durchlaufen:

- (i) Schriftliche Protokollierung der Videositzungen (siehe nächste Seite).
- (ii) Umsetzung der Protokolle in das Zustandsmodell (vgl. Kapitel 6 und 7).
- (iii) Vergleich und Analyse der Bearbeitungswege (vgl. Kapitel 6 und 8.1).
- (iv) Merkmalsfindung von Probandensitzungen durch Auswertung der Protokolle (vgl. Abschnitt 6.4).

Gerade bei der schriftlichen Protokollierung musste aufgrund der hohen Informationsdichte reduziert werden. Folgende Charakteristika legen Inhalt und Umfang der Protokolle fest:

- (i) Wesentliche Eingaben wurden protokolliert.
- (ii) Verbale Äußerungen der Probanden wurden, soweit möglich, dokumentiert.
- (iii) Erkennbare Verhaltensänderungen wurden dokumentiert.
- (iv) Meldungen des Systems wurden protokolliert.
- (v) Kontextbezogene Dialoge wurden dokumentiert.

Den Protokollpunkten wurden, um diese Stellen auch nachträglich leicht wiederfinden zu können, Bandzeiten zugeordnet. Das Protokoll nahm so folgende Gestalt an:

Einstellungen der Probanden Informationen gesammelt wurden. Aussagen und Folgerungen können so in Bezug auf aspektvariierende Ebenen der Beobachtung formuliert werden. Die natürliche Grenze dieser Detailtreue liegt in den Methoden selbst.

Methodische Überlegungen

6 Methodische Überlegungen

Die Überlegungen dieses Kapitels dienen dazu, die erhobenen Daten so zu reduzieren, dass Aussagen oder zumindest Indizien zum Vergleich von Probandensitzungen erkennbar werden. Ausgehend von den Videositzungen, welche Daten höchst möglicher Genauigkeit enthalten, wurde zu Protokollen reduziert, die nun zur Grundlage der weiteren Auswertung werden. Das folgende Schaubild veranschaulicht die Vorgehensweise:



Abbildung 24, Visualisierung Vorgehensweise

Das Schaubild enthält bereits den Begriff des *Zustands*, der eine zentrale Rolle in diesem Kapitel einnimmt und im Weiteren erklärt wird. Pfeile, die im Schaubild nach unten weisen, stellen Reduktionen bzw. Vereinfachungen dar. Um anschließend jedoch möglichst genaue Aussagen über das Verhalten einzelner Probanden gewinnen zu können, wird auf Ebenen höherer Datendichte und höheren Informationsgehalts gezielt zurückgegriffen. Ziel dieses Kapitels ist es, die formale Basis zur Reduktion der Textprotokolle zu schaffen. Dies scheint nicht ohne Konventionen, Vereinfachungen und Formalisierungen möglich. Speziell werden Begriffe, die zur Auswertung der Probandensitzungen herangezogen werden, geklärt. Der Leser sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die nun entwickelten abstrakten Konzepte im anschließenden Kapitel konkretisiert und auf die konkreten Situationen angewandt werden. Ein Verständnis der folgenden Kapitel ohne Kenntnis untenstehender Ausführungen scheint nur bedingt möglich.

Zu Beginn wurde ein *Zustandskonzept* entwickelt. *Zustände* sind fest definierbare Programmteile, welche in Abhängigkeit von der Benutzung und dem Benutzer aktiv sein können. Um dynamische Vorgänge in Programmen darstellen zu können, werden in einem nächsten Schritt *Zustandsübergänge*, sogenannte *Regeln* definiert. Die Menge aller Regeln und Zustände stellen dann das Programm dar. Die Begriffe des Programms und des Zeitpunkts seien kanonisch definiert, also mit den umgangssprachlichen Begriffen identisch. Um die Bedeutung der neuen Begriffe transparent darzustellen, werden im Anschluss an deren Einführung jeweils Erläuterungen angeführt. Abgeschlossen wird dieser Abschnitt durch ein zusammenfassendes Beispiel. Die letzten Ebenen der Datenreduktion sollen durch die Entwicklung von Ähnlichkeits- bzw. Unähnlichkeitsmaßen eröffnet werden. Die so gewonnenen Ähnlichkeits- bzw. Unähnlichkeitsmatrizen werden dann mit Hilfe multivariater statistischer Verfahren ausgewertet. Sowohl die Verfahren selbst, als auch deren Adäquatheit und Interpretierbarkeit werden erläutert und hinterfragt. In den nächsten Kapiteln werden die Modelle auf das verwandte Programm zur Bruchrechnung angewandt.

6.1 Zustände

6.1.1 Konvention:

Sind zwei Programme P , Q , durch einen User nicht voneinander zu unterscheiden, so sind diese *ununterscheidbar*.

Erläuterung:

Programme können sich durchaus in ihrer Programmierung unterscheiden, jedoch durch einfaches Nutzen ununterscheidbar sein. Der Begriff der Ununterscheidbarkeit von Programmen bezieht sich ausschließlich auf beobachtbare Elemente des Programms.

6.1.2 Konvention (Zustand):

Ein Zustand ist ein eindeutig beschreibbarer Teil eines Programms P , welcher vom User genutzt werden kann. Zustände werden im Allgemeinen mit ψ bezeichnet. Befindet sich ein *User* (U) zum Zeitpunkt t in einem solchen Zustand ψ , so wird dies durch $\psi|t^U$ notiert. Gilt dies nicht, so wird dies durch $\psi \nmid t^U$ formal beschrieben. Ebenfalls zugelassen sei $\psi|t$ (nutzerunabhängig) und $\psi|U$ (zeitunabhängig) und deren Negationen. $\{\psi\}$ ist die Menge des Zustands ψ .

Erläuterung:

Der Begriff des Programmteils ist vorgeprägt. Unklar ist dabei, ob dieser dynamisch oder statisch definiert ist. Der Begriff des Zustands stammt aus der Physik. Dessen Verwendung soll zum einen suggerieren, dass die eindeutig beschreibbaren Programmteile diskrete Übergänge haben, zum anderen, dass es keine Verbindungen zwischen einzelnen Zuständen geben muss. Durch die eingeführten symbolischen Konventionen können Zusammenhänge zwischen User und Nutzung des Programms beschrieben werden. Praktisch bedeutet die konkrete Definition eines Zustands die Festlegung, wann sich der User in diesem befindet und wann nicht.

6.1.3 Definition (Gesamtbearbeitungszeit):

Bearbeitet ein User U ein Programm P in einer zusammenhängenden Zeitspanne T , so heißt T^U *Gesamtbearbeitungszeit* des Users. Zugelassen sei auch die Bezeichnung T (User klar oder unwichtig).

Der Bearbeitungsbeginn wird im Allgemeinen durch t_a , das Bearbeitungsende durch t_e notiert. Dass der Beginn der Bearbeitung vor deren Ende stattfand, wird durch $t_a < t_e$ beschrieben. T ist dann nichts anderes, als das Intervall $[t_a; t_e]$.

Erläuterung:

Wird ein Programm durch einen User genutzt, so ist diese Nutzung abhängig von der Zeit. Die Bearbeitung findet dabei innerhalb einer gewissen Zeitspanne statt. Schließlich ist es das Ziel, durch die zeitliche Abhängigkeit Zustände derart zu verknüpfen, dass der Betrachter deren Aktivität verfolgen und auch übersichtliche Darstellungen erzielen kann. Das Problem der Beschreibung liegt letztendlich darin begründet, dass sich die Aktivität von Zuständen primär auf Zeitpunkte bezieht⁶⁴, die Nutzung durch einen User jedoch Intervalle erfordert. Dieses Problem findet Berücksichtigung bei der Definition von Zustandsübergängen.

⁶⁴ Dies wird vor allem durch die plötzlichen Zustandsübergänge bedingt.

6.1.4 Definition (Zeitintervalle):

t_1, t_2 seien Zeitpunkte und es gelte $t_1 < t_2$ (t_1 war vor t_2). Dann wird das Zeitintervall $\tau_{1,2}$ wie folgt definiert:

$$\tau_{1,2} = \{t \in T \mid t_1 \leq t < t_2\} = [t_1; t_2[$$

Es gilt dann für T : $T = \tau_{a,e} \cup \{t_e\}$.

Erläuterung:

Halboffene Intervalle tragen gegenüber geschlossenen den Vorteil, dass der Schnitt zweier angrenzender Zeitintervalle leer ist. Dies bedingt einige Vereinfachungen in den folgenden Definitionen.

6.1.5 Definition (Zerlegung der Gesamtbearbeitungszeit):

(t_i) : t_1, t_2, \dots, t_g sei Folge von g Zeitpunkten mit $t_a = t_1 < t_2 < \dots < t_g = t_e$; $T = [t_a; t_e]$ und $g \leq |\mathbb{Q}|$. $\{\tau_{1,2}; \tau_{2,3}; \dots; \tau_{g-1,g}\} = \xi_g$ heißt dann Zerlegung von T in $g-1$ Zeitintervalle. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \bigcup_{i=1}^{g-1} \tau_{i,i+1} = T \setminus \{t_e\} \\ \text{(ii)} \quad & \bigcap_{i=1}^{g-1} \tau_{i,i+1} = \emptyset \end{aligned}$$

Die Folge (t_i) heißt Folge der *Grenzzeitpunkte* von ξ_g .

Erläuterung:

Bearbeitet ein User ein Programm, so kann er sich in Abhängigkeit von der Zeit in verschiedenen Zuständen des Programms befinden. Die Bearbeitungszeit muss aus diesem Grund einteilbar sein. Ziel der gefassten Definition ist es somit, die Aktivität von Zuständen zeitabhängig erfassen zu können.

6.1.6 Bemerkung:

Die Definition des Zustands lässt den Fall zu, dass der gesamte Umfang eines Programms als Zustand definiert wird. Somit ist das Zustandsmodell auf alle Programme anwendbar. Ist ψ in dieser Weise definiert, so ist $\psi|t^U$ gleichbedeutend mit $P|t^U$. Ferner interessiert jedoch die Einteilung eines Programms in disjunkte Abschnitte. Hierzu werden im Folgenden Definitionen zur Zustandszerlegung formuliert.

6.1.7 Definition (Satz von Zuständen):

Gegeben seien zwei beliebige Zustände eines Programms. Um diese voneinander unterscheiden zu können, wird eine Indizierung (ψ_1, ψ_2) vorgenommen. Die beiden Zustände ψ_1 und ψ_2 heißen *unabhängig*, wenn für alle Zeitpunkte t aller möglichen Bearbeitungen gilt:

$$(\psi_1|t \wedge \psi_2 \nmid t) \vee (\psi_1 \nmid t \wedge \psi_2|t) \vee (\psi_1 \nmid t \wedge \psi_2 \nmid t)$$

Diese Eigenschaft soll mit $\psi_1 \neq \psi_2$ notiert werden. Zwei Zustände, die nicht unabhängig sind, sind abhängig.

Zwei Zustände $\psi_1; \psi_2$ heißen *verschieden*, wenn es bei einer Bearbeitung des Programms eine Zeitspanne τ gibt, so dass gilt:

$$(\psi_1|\tau \wedge \psi_2 \nmid \tau) \vee (\psi_1 \nmid \tau \wedge \psi_2|\tau).$$

Verschiedene Zustände können sowohl abhängig als auch unabhängig sein. Weiterhin seien n voneinander jeweils verschiedene Zustände eines Programms $\psi_1; \psi_2; \dots; \psi_n$ gegeben. $\{\psi_1; \psi_2;$

$\dots; \psi_n\}$ beschreibt dann die Menge dieser Zustände. Gilt für alle Permutationen von Zuständen mit $i \neq j$, $\psi_i \neq \psi_j$, so heißt $\{\psi_1; \psi_2; \dots; \psi_n\}$ Satz von Zuständen und wird kurz mit S_n notiert.

Erläuterung:

Verschiedene Zustände können geschachtelt sein. Es können also durchaus sinnvolle Zustände definiert werden, die jedoch nicht unabhängig sind, d.h. der User kann sich gleichzeitig in zwei Zuständen befinden. Dies erschwert die Beschreibung des Userverhaltens. Aus diesem Grund schien vorab die begriffliche Unterscheidung von verschiedenen und unabhängig notwendig. Unabhängige Zustände erleichtern die Beschreibung des Userverhaltens. Die folgende Definition zielt bereits darauf ab, Programme vollständig durch unabhängige Zustände zu beschreiben. Falls von einem Betrachter lediglich verschiedene Zustände definiert wurden, so können diese in einen Satz unabhängiger Zustände überführt werden. Dies bedeutet, dass es zur Entwicklung eines beschreibenden Modells hinreichend ist, sich auf unabhängige Zustände zu konzentrieren.

6.1.8 Satz und Definition (Satzzerzeugung):

Jede Menge von Zuständen ist in einen Satz von Zuständen überführbar.

Beweis:

$Z_n := \{\psi_1; \psi_2; \dots; \psi_n\}$ sei Menge von verschiedenen, jedoch kein Satz von Zuständen. Z_n kann dann wie folgt in einen Satz von Zuständen überführt werden:

- (i) Suche zwei abhängige Zustände ψ_i, ψ_j mit $i \neq j$.
- (ii) Erzeuge wie folgt die Zustände ψ'_i, ψ'_j und ψ_{n+1} :

$$\psi'_i = \psi_i \cap \psi_j$$

$$\psi'_j = \psi_j \setminus \psi'_i$$

$$\psi'_{n+1} = \psi_j \setminus \psi'_i$$

- (iii) Definiere neue Menge von Zuständen $Z_{n+1} := \{\psi_1; \psi_2; \dots; \psi_n; \psi_{n+1}\}$ und überprüfe, ob es sich um einen Satz von Zuständen handelt. Wenn nicht, müssen (i), (ii) und (iii) wiederholt werden, da mindestens zwei abhängige Zustände existieren.

Letztendlich findet man durch Anwendung dieses Algorithmus stets einen Satz von Zuständen. Er soll mit S_m bezeichnet werden. ♦

S_m heißt dann aus Z_n erzeugter Satz. Es gilt im Allgemeinen nicht $m > n$. Mengen von verschiedenen Zuständen können durch Elimination identischer Zustände gewonnen werden. Für jedes Programm, in dem verschiedene Zustände definiert werden können, kann somit ein Satz von Zuständen erzeugt werden.

6.1.9 Definition (vollständiger Satz von Zuständen):

S_m sei Satz von Zuständen. S_m heißt *vollständiger Satz von Zuständen*, wenn kein neuer Zustand $\underline{\psi}$, der nicht leer ist, in Bezug auf P definiert werden kann, so dass für alle $\psi \in S_m$ gilt: $\psi \subset \underline{\psi}$ und ψ ist verschieden zu $\underline{\psi}$. Existiert ein solcher Zustand $\underline{\psi}$, so werde dieser zu S_m hinzugefügt. Durch Satzzerzeugung erhält man einen neuen Satz von Zuständen, welcher wiederum auf Vollständigkeit überprüft werden kann. Vollständige Sätze werden mit V_m notiert.

Erläuterung:

Befindet sich ein User in einem Programm, so werden, wie bereits erläutert, verschiedene Zustände in zeitlicher Abhängigkeit aktiviert. Soll eine Beschreibung des Userverhaltens lückenlos sein, müssen alle Zustände, die auftauchen können, beschrieben werden. Dies ist nur

möglich, wenn ein vollständiger Satz von Zuständen vorliegt. Ein solcher kann, wie nun erläutert wird, stets erzeugt werden.

6.1.10 Satz (Erzeugung von vollständigen Zustandssätzen):

Jeder Satz von Zuständen kann zu einem vollständigen Satz von Zuständen erweitert werden.

Beweis: S_n sei Satz von Zuständen aber nicht vollständig. ψ sei der Zustand, welcher das gesamte Programm überdeckt (vgl. Bemerkung 6.1.6). Damit ist

$$V_m = V_{n+1} = S_n \cup \{\psi\} \setminus S_n$$

vollständiger Satz von Zuständen. ♦

Erläuterung:

Dieser triviale Satz hat praktisch große Bedeutung. Er beinhaltet nämlich, dass man in den Fällen, in welchen sich ein Beobachter auf bestimmte Teile eines Programms beschränkt (Wie es auch in der vorliegenden Untersuchung der Fall ist), auf einfache Weise ein Zustand definiert werden kann, der die lückenlose Beschreibung des Userverhaltens bezüglich der Nutzung eines Programms erlaubt. Man wählt schlicht das Komplement der Vereinigung aller definierten Zustände.

6.1.11 Definition (Anfangszustand, Endzustand):

Gegeben sei ein Programm P , welches von einem User U innerhalb der Bearbeitungszeit $T^U = [t_a, t_e]$ bearbeitet wird. Derjenige Zustand ψ_a für den gilt: $\psi_a|t_a$ heißt Anfangszustand. Derjenige Zustand ψ_e für den gilt: $\psi_e|t_e$ heißt Endzustand.

6.2 Klassifizierung von Programmen

Der Begriff dieses Abschnitts führt eine Klasse von Programmen ein. Ziel ist es dabei, eine Basis zur Beschränkung auf bestimmte Typen von Programmen vorzunehmen.

6.2.1 Definition (Diskretisierbarkeit):

Gegeben sei ein Programm P . Existiert ein vollständiger Satz von Zuständen V_m zu P mit $m > 1$, so heißt P *diskretisierbar*.

Zur dynamischen Beschreibung von Usersitzungen sind die bisher vereinbarten Konventionen jedoch nicht hinreichend. Zustände müssen zum einen noch inhaltlich fassbar, zum anderen miteinander verknüpft werden. Dies zu erreichen ist das Ziel der nächsten Absätze.

6.3 Zustandsübergänge

Die bisherigen Definitionen und Beschreibungen dienen lediglich der Aufklärung des Zusammenhangs zwischen Zeit, Programm und Probanden. Erst die Einführung von *Zustandsübergängen* ermöglicht die Beschreibung dynamischer Vorgänge. Schließlich ist es Ziel dieser Beschreibungen, Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Probandensitzungen untersuchen zu können. Speziell hierzu werden die im Folgenden definierten *Regeln* herangezogen.

6.3.1 Definition (Zustandsübergang / Regel):

ψ_1 ; ψ_2 seien Zustände. t_1 , t_2 seien Zeitpunkte und es gelte $t_2 = t_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Weiterhin gelte $(\psi_1|t_1 \wedge \psi_1 \nmid t_2) \wedge (\psi_2 \nmid t_1 \wedge \psi_2|t_2)$. Zum Zeitpunkt t_2 findet somit ein

Zustandsübergang von ψ_1 nach ψ_2 statt. $\mathcal{A}_{x,y}$ heißt *Regel* von ψ_x und überführt den Zustand ψ_x in den Zustand ψ_y . Findet zum Zeitpunkt t_2 ein Zustandsübergang von ψ_1 nach ψ_2 statt, so wird dies formal durch $t_2:\mathcal{A}_{1,2}\psi_1\equiv\psi_2$, d.h. $\mathcal{A}_{1,2}\psi_1|t_2$ und $\psi_2|t_2$, erfasst. Zeitunabhängig kann dies wie folgt symbolisiert werden: $\mathcal{A}_{1,2}\psi_1\equiv\psi_2$. $\mathcal{A}_{1,2}\psi_1$ ist aus diesem Grund ebenfalls ein Zustand. $\mathcal{A}_{1,2}$ überführt ψ_1 nach ψ_2 . Analog können Regeln $\mathcal{B}_{x,y}$; $\mathcal{C}_{x,y}$; $\mathcal{D}_{x,y}$; $\mathcal{E}_{x,y}$; ... nach Bedarf definiert werden. Die Regeln $\mathcal{A}_{x,y}$ und $\mathcal{A}_{y,x}$ heißen *stark invers*, da ihnen die gleichen Regeltypen zugrunde liegen. Handelt es sich um verschiedene Regeltypen $\mathcal{B}_{x,y}$; $\mathcal{C}_{y,x}$, heißen sie *schwach invers*.

Man beachte: Seien $\mathcal{B}_{1,2}$, $\mathcal{C}_{1,2}$ Regeln, so gilt:

$$\mathcal{A}_{1,2}\psi_1\equiv\mathcal{B}_{1,2}\psi_1\equiv\mathcal{C}_{1,2}\psi_1\equiv\psi_2,$$

falls diese existieren.

Dies bedeutet, dass das Zulassen verschiedener Regeln für einen Zustandsübergang keinen Einfluss auf den Zustandsübergang selbst hat. Die Unterscheidung ist letztendlich rein inhaltlich motiviert. Die Existenz von Regeln ist durch das Programm vorgegeben. Wird die Existenz einer Regel, d.h. eines bestimmten Zustandsübergangs, postuliert, so muss dieser zumindest irgendwann in irgendeiner Usersitzung beobachtbar sein.

Erläuterung:

User können durch verschiedene Verhaltensweisen identische Zustandsübergänge herbeiführen. Angenommen ein Programm wird durch zwei Zustände ψ_1 und ψ_2 beschrieben. ψ_2 sei Endzustand, d.h. das Programm wurde beendet, ψ_1 sei nach Satz 6.1.10 erzeugt. Ein User kann beispielsweise ein Programm bewusst oder durch einen Bedienungsfehler beenden. In beiden Fällen wird identischer Zustandsübergang herbeigeführt. Die Gründe für den Übergang sind jedoch verschieden. Inhaltlich lohnt es also, zwei Regeltypen festzulegen, deren Unterschied durch die Großbuchstaben \mathcal{F} und \mathcal{B} symbolisiert wird. Um eine solche Situation und den damit verbundenen Zustandsübergang mit Hilfe von Regeln beschreiben zu können, werden die beiden Regeln $\mathcal{F}_{1,2}$ und $\mathcal{B}_{1,2}$ eingeführt. $\mathcal{F}_{1,2}\psi_1\equiv\psi_2$ beschreibt demnach, dass der Zustandsübergang durch einen Bedienungsfehler herbeigeführt wurde. $\mathcal{B}_{1,2}\psi_1\equiv\psi_2$ impliziert, dass das Programm bewusst beendet wurde.

6.3.2 Definition (Menge von Regeln, Regelsatz):

Nicht jeder Zustand ist aus jedem Zustand erreichbar. Im Folgenden soll die Menge aller Regeln eines Zustands zusammengefasst dargestellt werden. Diese wird dann *Menge von Regeln* von ψ_x bezüglich eines Satzes von Zuständen \mathcal{S}_n mit $|\mathcal{S}_n|=n$ genannt. Enthält eine Menge Ξ_x von Regeln bezüglich eines Zustands ψ_x alle Regeln von ψ_x , so heißt Ξ_x *Regelsatz* von ψ_x .

Erläuterung:

Regelsätze werden durch die Frage motiviert, wie einzelne Zustände aus einem bestimmten Zustand erreicht werden können. Durch Einsicht in den Regelsatz eines Zustandes kann erkannt werden, ob und wie Zustände von ihm erreichbar sind. Er charakterisiert die Möglichkeiten des Users, von einem bestimmten Zustand in einen anderen zu gelangen.

6.3.3 Definition (Verfassung):

Die Menge $\Lambda_n=\{\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \dots, \Xi_n\}$ aller Regelsätze eines Programms \mathbf{P} bezüglich eines vollständigen Satzes von Zuständen \mathcal{V}_n heißt *Verfassung*. Ein Programm wird durch das Paar $(\Lambda_n, \mathcal{V}_n)$ vollständig beschrieben. Es gilt: \mathbf{P} und $(\Lambda_n, \mathcal{V}_n)$ sind ununterscheidbar, d.h. ein Programm wird durch einen vollständigen Satz von Regeln und dessen Verfassung beschrieben.

Erläuterung:

Die bisher eingeführten Konventionen erlauben es zum einen, Programme in Zustände zu zerlegen. Zum anderen kann die Vernetzung der Zustände durch Regeln beschrieben werden. Noch nicht beschrieben werden können konkrete Usersitzungen. Ebenfalls wurde die Verknüpfung von Zuständen lediglich inhaltlich beschrieben. Leitziel des weiteren Vorgehens ist es, die noch offenen Lücken zu schließen.

6.3.4 Definition (Zustandregelkette, Bearbeitungsweg):

Gegeben sei ein beliebiger Satz von Zuständen S_n des Programms P . Es gelte $|S_n|=n$. O.B.d.A. kann vorausgesetzt werden, dass das erste Element von S_n der Anfangszustand der Bearbeitung durch einen User U ist. ψ_1 sei somit Anfangszustand, ψ_e Endzustand. T^U sei Bearbeitungszeit von U . $\{\tau_{1,2}; \tau_{2,3}; \dots; \tau_{g-1,g}\} = \xi_g$ sei Zerlegung von T^U in $g-1$ Zeitintervalle. (t_i) sei die Folge der Grenzzeitpunkte von ξ_g . Die Anzahl der Zustandsübergänge während der Bearbeitung durch den Probanden soll dabei genau $g-1$ sein. Weiter sei ξ_g o.B.d.A. so gewählt, dass bei jedem Grenzzeitpunkt genau ein Zustandsübergang stattfindet. Die Zustandsübergänge können durch eine *Regelkette* beschrieben werden. Seien $\mathfrak{X}_{\alpha;\beta}, \mathfrak{D}_{\chi;\delta} \in \Lambda_n$ Regeln. Die Regeln O_k ($1 \leq k \leq g-1$) einer Regelkette \mathbf{K} werden dann durch die folgenden Bedingungen charakterisiert:

- (i) $O_k \in \Lambda_n$ (Verfassungstreu)
- (ii) Ist $O_k = \mathfrak{X}_{\alpha;\beta}$ und $O_{k+1} = \mathfrak{D}_{\chi;\delta}$, so ist $\beta = \chi$. (kontinuierlich)
- (iii) Ist $O_1 = \mathfrak{X}_{\alpha;\beta}$, so ist ψ_α Anfangszustand und somit $\alpha = 1$. (Starttreu)
- (iv) Ist $O_{g-1} = \mathfrak{X}_{\alpha;\beta}$, so ist ψ_β Endzustand. (Endtreu)

Alle O_k , für welche die Bedingungen (i), (ii) erfüllt sind, heißen *Kettenglieder*.

Durchlief ein User ein Programm und befindet sich zum Ende der Bearbeitungszeit im Endzustand, so kann sein Vorgehen durch das Tupel $(\mathbf{K}; (t_i))$, bestehend aus einer Regelkette $\mathbf{K} = (O_1, O_2, \dots, O_{g-1})$ und der oben beschriebene Folge von Grenzzeitpunkten (t_i) der Zerlegung ξ_g wie folgt charakterisiert und notiert werden:

$$O_{g-1|t_g} O_{g-2|t_{g-1}} O_{g-3|t_{g-2}} \dots O_{1|t_2} \psi_1 \equiv \psi_e \equiv (\mathbf{K}; (t_i)) \psi_1$$

$(\mathbf{K}; (t_i))$ heißt *Bearbeitungsweg*, $g-1$ ist die *Länge* des Bearbeitungsweges.

6.3.5 Bemerkung:

Sei \mathbf{K} eine Regelkette. Diese Kette und deren Glieder, ohne entsprechende Folge von Grenzzeitpunkten, haben lediglich ordinalen Charakter. Bei ausschließlicher Betrachtung der Kette \mathbf{K} gehen die Information über die Übergangszeitpunkte verloren.

Erläuterungen zu Ketten:

Die Reihenfolge angewandter Regeln sollte formal fassbar gemacht werden. In Ketten ist jedes Kettenglied eindeutig angeordnet. Aus diesem Grund reicht es zur zeitlichen Zuordnung aus, zusätzlich eine Folge von Grenzzeitpunkten zu betrachten. Die Kette und die zugehörige Folge von Grenzzeitpunkten beschreiben das Vorgehen eines Users bezüglich vorab definierter Zustandssätze und entsprechender Verfassung vollständig. Praktisch wird beobachtet, wann der User wie oder warum in welchen Zustand wechselt. Die entsprechende Regel wird dann das neue, erste Glied der Kette. Die Kontinuität einer solchen Kette ist dabei trivial. Ist eine Kette nicht kontinuierlich, liegt ein Fehler des Beobachters vor. Usersitzungen können nun durch das vorgestellte Zustandsmodell beschrieben werden. Damit der betriebene formale Aufwand fruchtet, werden im Folgenden Distanz- und Ähnlichkeitsmaße auf Bearbeitungswegen

eingeführt. Diese sollen es erlauben, Kriterien zu finden, um Bearbeitungswege miteinander vergleichen zu können.

6.3.6 Maße zum Vergleich von Zustandsmatrizen

Um Bearbeitungswege mit Hilfe datenanalytischer Verfahren vergleichen zu können, wurden zwei Maße entwickelt. Zum einen wird ein Distanzmaß definiert. Inhaltlich handelt es sich hierbei um den Vergleich von in Bearbeitungswegen vorkommenden Regeln. In einem ersten Schritt wird von der Zeit abstrahiert. Dies scheint gerechtfertigt, da bereits Verhaltensweisen in bestimmten Zuständen auf Verhaltenseigenschaften des Probanden weisen. Regeln bezeichnen einen Grund für einen bestimmten Zustandsübergang. Schüler, die bei einer Aufgabe ähnliche Schwierigkeiten haben, werden entsprechend auch aus ähnlichen Gründen bestimmte Regeln verwenden. Unterscheiden sich die Schwierigkeiten, werden entsprechend andere Regeln verwandt. Das im nächsten Abschnitt definierte Distanzmaß bezüglich zweier Regelketten $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)$ gibt gerade an, welche Regeln zwei Bearbeitungswege nicht gemein haben. Jede Abweichung zweier Regelketten wird durch eine Erhöhung der Distanz derselben ausgedrückt. Die im nächsten Schritt definierte Korrelation zwischen Bearbeitungswegen abstrahiert zusätzlich von den Aufgaben, bei denen die Verhaltensweisen diagnostiziert werden. Mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten k_{ef} werden Ähnlichkeiten der in den Regeltypen ausgedrückten Verhaltensweisen von Probanden gemessen. Argumentiert wird über die Häufigkeiten des Vorkommens einzelner Regeltypen. Im Gegensatz zum Distanzmaß $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)$ ist k_{ef} nach oben und unten beschränkt. Eine Korrelation nah bei 1 soll in Anlehnung an die Pearson-Korrelation bedeuten, dass ähnlich oft gleiche Verhaltensweisen gemäß der Regeltypen auftauchen. Man kann in diesem Fall also von guter Übereinstimmung ausgehen. Im Gegensatz zu der angeführten hohen Korrelation sollen niedrige Korrelationen im Grenzfall von k_{ef} bedeuten, dass der Koeffizient nah bei -1 ist. Inhaltlich sollen sich dann die verwandten Regeltypen unterscheiden. Im Fall von $k_{ef} = -1$ soll es sogar bedeuten, dass die jeweils verwandten Regeltypen disjunkt sind. Um Unstimmigkeiten bezüglich der Definitionen weitgehend auszuschließen, werden die entsprechenden Maße im Folgenden, ähnlich wie die vorhergehenden Begriffe, formal eingeführt. Im Anschluss daran werden Zustandsmatrizen zur Vereinfachung der Darstellung und deren konkrete Umsetzung im Rahmen der Konzeption beschrieben.

6.3.7 Erläuterung und Definition (Distanz von Bearbeitungswegen):

Betrachte zwei beliebige Regelketten \mathbf{K}_e und \mathbf{K}_f . $\{L_1, L_2, \dots, L_q\}$ sei die Menge der Glieder der Regelkette \mathbf{K}_e , $\{F_1, F_2, \dots, F_w\}$ sei Menge der Glieder der Regelkette \mathbf{K}_f . Die Distanz zweier Bearbeitungswege $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)$ soll dann naheliegenderweise umso größer sein, je größer die Anzahl derjenigen Regeln ist, die nicht gleichzeitig in beiden Regelketten vorkommen. Dies impliziert, dass $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)$ bis auf eine streng monoton steigende Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $T(0)=0$ durch den Ausdruck :

$$\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f) = |\{ \{L_1, L_2, \dots, L_q\} \cup \{F_1, F_2, \dots, F_w\} \} \setminus \{ \{L_1, L_2, \dots, L_q\} \cap \{F_1, F_2, \dots, F_w\} \} |$$

definiert werden kann. Da in der vorliegenden Untersuchung lediglich ordinale Signifikanz von Distanzmaßen vorausgesetzt wird, kann T als die identische Abbildung auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$ vorausgesetzt werden. Umso kleiner $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)$ ist, umso weniger unterscheiden sich die von den Probanden verwandten Regeln voneinander. Ist $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)=0$, so heißen \mathbf{K}_e und \mathbf{K}_f *bearbeitungsähnlich*. Die Distanzen aller Probanden werden in einer Distanzmatrix \mathcal{D} festgehalten.

6.3.8 Definition (Korrelation von Bearbeitungswegen)

$\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \dots, \mathbf{R}^s$ seien alle Regeltypen von Λ_n . Betrachte zusätzlich die Regelketten $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_p$. Wenn \mathbf{P} die Menge der Probanden ist, so gilt $|\mathbf{P}|=p$. $h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_e)$ sei die Häufigkeit des Vorkommens des Regeltyps \mathbf{R}^i in der Regelkette \mathbf{K}_e mit $1 \leq e \leq p$ und $1 \leq i \leq s$. Im ersten Schritt ist ein Ähnlichkeitskoeffizient $s_{e,f}$ ($1 \leq e, f \leq p$) gesucht, zu dem eine Funktion $F: (\mathbb{R}^{\geq 0})^s \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ und (symmetrische) Funktionen $q_k: (\mathbb{R}^{\geq 0})^2 \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ($1 \leq k \leq s$) existieren, so dass für alle $1 \leq e, f, v \leq p$ folgende Postulate berücksichtigt werden. Sei dazu Π_s die Gruppe der Permutationen auf $\{1, \dots, s\}$.

Postulate über die $s_{e,f}$ bestimmenden Veränderlichen:

$$\mathbf{A1:} \quad s_{e,f} = F\left(q_1\left(h(\mathbf{R}^1, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^1, \mathbf{K}_f)\right), \dots, q_s\left(h(\mathbf{R}^s, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^s, \mathbf{K}_f)\right)\right).$$

Postulate über die Eigenschaften der Funktionen:

$$\mathbf{A2.1:} \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \forall x \in \mathbb{Q}^+ \forall y \in \mathbb{Q}^+ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (x \leq y \Rightarrow q_k(x, y) = q_k(nx, ny)).$$

(Postulat über die Invarianz der Funktionen q_k gegenüber der Vervielfachung beider Komponenten. Im Rahmen unserer Resultate über Zielfunktionen in der ordinalen Datenanalyse (vgl. [69; 70; 71]) ist dieses Postulat ein natürliches Postulat.)

$$\mathbf{A2.2:} \quad \exists h \in \{1, \dots, s\} \forall k \in \{1, \dots, s\} \setminus \{h\} \exists t_k \in \mathbb{R}^{\geq 0} (q_k = t_k \cdot q_h).$$

(Postulat über die (höchstens) Eindimensionalität des von den Funktionen q_1, \dots, q_s aufgespannten Vektorraums über \mathbb{R} .)

$$\mathbf{A2.3:} \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} (q_k(0, \cdot) \text{ ist im Nullpunkt stetig})$$

Postulate über die Eigenschaften von F :

$$\mathbf{A3.1:} \quad F(0, \dots, 0) = 0.$$

$$\mathbf{A3.2:} \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \forall (x_1, \dots, x_k, \dots, x_s) \in \mathbb{N}^s \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{\geq 0} (F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_s) < F(x_1, \dots, x_k + \varepsilon, \dots, x_s)).$$

(Postulat über die strenge Monotonie von F .)

$$\mathbf{A3.3:} \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \forall (x_1, \dots, x_k, \dots, x_s) \in \mathbb{N}^s \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{\geq 0} \forall \pi \in \Pi_s (F(x_1, \dots, x_k + \varepsilon, \dots, x_s) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)} + \varepsilon, \dots, x_{\pi(s)})).$$

(Postulat über die strenge Permutationsunabhängigkeit von F .)

Postulate über die Verträglichkeit von F mit den Funktionen q_k :

$$\mathbf{A4.1:} \quad \forall (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s \forall (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (n \geq \max\{n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_s\} \Rightarrow (F(t_1 \cdot n_1, \dots, t_h \cdot n_h, \dots, t_s \cdot n_s) < F(t_1 \cdot m_1, \dots, t_h \cdot m_h, \dots, t_s \cdot m_s) \Leftrightarrow F(q_1(n_1, n), \dots, q_s(n_s, n)) < F(q_1(m_1, n), \dots, q_s(m_s, n)))).$$

$$\mathbf{A4.2:} \quad \forall k \in \{1, \dots, s\} \exists g_k \in \mathbb{R}^{\geq 0} \forall (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s \forall (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} (n \geq \max\{n_1, \dots, n_s, m_1, \dots, m_s\} \Rightarrow (F(g_1 \cdot n_1, \dots, g_s \cdot n_s) < F(g_1 \cdot m_1, \dots, g_s \cdot m_s) \Leftrightarrow F(q_1(n_1, n), \dots, q_s(n_s, n)) < F(q_1(m_1, n), \dots, q_s(m_s, n)))).$$

(vgl. Bedingung S6 für Stressmaße.)

Nun gilt folgender Satz (Beweis Kapitel 10):

Satz:

Die Postulate **A1**, **A2.1**, **A2.3**, **A3.1**, **A3.2**, **A3.3** und **A4.2** sowie die Postulate **A1**, **A2.1**, **A2.2**, **A2.3**, **A3.1**, **A3.2**, **A3.3** und **A4.1** implizieren die Existenz nichtnegativer reeller Zahlen g_1, \dots, g_s und die Existenz einer streng monoton steigenden Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, so dass für alle $1 \leq e, f \leq p$ die Gleichung

$$s_{e,f} = T \left(\sum_{k \in \{1, \dots, s\}, \max\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\} > 0} g_k \cdot \frac{\min\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\}}{\max\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\}} \right) \text{ gilt.}$$

Da im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen lediglich ordinale Signifikanz von Ähnlichkeitsmaßen vorausgesetzt wird, sei im Folgenden T die identische Abbildung auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Um Trivialitäten auszuschließen, wird vorausgesetzt, dass die Gewichtungen g_1, \dots, g_s positiv sind.

Mit Hilfe folgender Überlegung lässt sich nun aus $s_{e,f}$ ein „Korrelationskoeffizient“ $k_{e,f}$ gewinnen. Gesucht sind für jedes Paar (e, f) ($1 \leq e, f \leq p$) reelle Zahlen $a_{e,f}$ und $b_{e,f}$, so dass folgende Bedingungen gelten.

B1: Aus $h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_e) = h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_f)$ für alle $1 \leq i \leq s$ folgt $k_{e,f} = a_{e,f} \cdot s_{e,f} + b_{e,f} = 1$.

B2: Aus $s_{e,f} = 0$ folgt $k_{e,f} = a_{e,f} \cdot s_{e,f} + b_{e,f} = -1$.

Implizit in obigem Satz ist die Bedingung $h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_e) = h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_f)$ für alle $1 \leq i \leq s$ genau dann, wenn die Gleichung

$$s_{e,f} = \sum_{i \in \{1, \dots, s\}, \max\{h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^i, \mathbf{K}_f)\} > 0} g_i =: M_{e,f}$$

erfüllt ist, enthalten.

Mit Hilfe der Bedingungen **B1** und **B2** folgt aus dieser Beobachtung nacheinander $b_{e,f} = -1$ und $a_{e,f} = \frac{2}{M_{e,f}}$. Daher gilt

$$k_{e,f} = -1 + \frac{2}{M_{e,f}} \cdot s_{e,f}.$$

Das folgende Beispiel erläutert die konkrete Berechnung des Koeffizienten:

Gegeben seien die Regeltypen $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ und die Bearbeitungswege $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$. Die folgende Tabelle gibt die Häufigkeiten des Vorkommens der Regeltypen in den jeweiligen Bearbeitungsweisen wieder:

	\mathbf{K}_1	\mathbf{K}_2	\mathbf{K}_3
\mathbf{R}^1	20	10	20
\mathbf{R}^2	0	0	19
\mathbf{R}^3	7	6	0

Eine Gewichtung der Regeltypen wird (hier willkürlich) vorgegeben: $(g_1|g_2|g_3)=(1|1|2)$. Zu berechnen sind insgesamt drei Korrelationskoeffizienten. Für das vorliegende Beispiel ergibt sich:

$$k_{1,2} = -1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1} \right) \cdot \left(\frac{10}{20} \cdot 1 + \frac{6}{7} \cdot 2 \right) = -1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{31}{14} = \frac{10}{21} \approx 0,48$$

$$k_{1,3} = -1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1} \right) \cdot \left(\frac{20}{20} \cdot 1 + \frac{0}{19} \cdot 1 + \frac{0}{7} \cdot 2 \right) = -1 + \frac{2}{4} \cdot 1 = -0,5$$

$$k_{2,3} = -1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1} \right) \cdot \left(\frac{10}{20} \cdot 1 + \frac{0}{19} \cdot 1 + \frac{0}{6} \cdot 2 \right) = -1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = -0,75$$

Die Bearbeitungswege \mathbf{K}_1 und \mathbf{K}_2 sind am ähnlichsten gemäß des Koeffizienten k_{ef} . Dies wird nicht zuletzt durch die Gewichtung bedingt. Die anderen Bearbeitungswege unterscheiden sich jeweils paarweise durch die verwandten Regeltypen.

6.4 Zustandsmatrizen

Es ist nun möglich, Programme einer großen Programmklasse sowohl formal, als auch inhaltlich zu beschreiben. Um praktisch mit diesen Definitionen arbeiten zu können, wird im Folgenden ein Modell eingeführt, welches die praktikable und automatisierte Handhabung der Daten erlaubt. An dieser Stelle fiel die Entscheidung auf Matrizen. Diese haben gegenüber anderen Strukturen den Vorteil, dass deren Auswertung in Standardprogrammen wie SPSS oder EXCEL™ leicht vorgenommen werden kann. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Struktur dieser Matrizen zu klären.

6.4.1 Zur Struktur von Zustandsmatrizen:

Ein User U bearbeitet ein diskretisierbares Programm P in einer zusammenhängenden Zeitspanne T . Für das Programm P sei ein vollständiger Satz von Zuständen $\{\psi_1; \psi_2; \dots; \psi_n\} = V_n$ gegeben. Auf diesem Satz seien k verschiedene Typen von Regeln $\mathfrak{A}^1, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^k$ definiert und eine entsprechende Verfassung $\Lambda_n = \{\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \dots, \Xi_n\}$ mit Regelsätzen gegeben.

$O_{g-1|t_g} O_{g-2|t_{g-1}} O_{g-3|t_{g-2}} \dots O_{1|t_2} \psi_1 \equiv \psi_e \equiv (\mathbf{K}; (t_i)) \psi_1$ sei der Bearbeitungsweg des Users U , wobei die jeweiligen Kettenglieder aus den vorab definierten Regeln bestehen. Die zugehörige Zustandsmatrix \mathfrak{M} soll dann genau $g-1$ Zeilen und $n+1+1=n+2$ Spalten haben. Die Anzahl der Zeilen ergibt sich aus der Anzahl der Zustandsübergänge, die Anzahl der Spalten setzt sich zusammen aus der Anzahl der Zustände ($|V_n|$), einer Spalte für Typnummern von Regeln (1 bis k) und einer Spalte für die Dokumentation der Zeitpunkte t_i der Zustandsübergänge. In der Zeitspalte seien Zeitbezeichnungen, in allen anderen Spalten lediglich natürliche Zahlen zugelassen.

6.4.2 Regeln in Zustandsmatrizen

Betrachte den Bearbeitungsweg des Users und speziell der Teil $O_{i|t_{i+1}} = \mathfrak{A}_{x,y|t_{i+1}}^j$ mit $1 \leq x \leq n$; $1 \leq y \leq n$; $1 \leq j \leq k$ und $1 \leq i \leq g-1$. Dies wird wie folgt in der Zustandsmatrix vermerkt:

1. In der Zeitspalte wird in der i -ten Zeile die Zeit t_{i+1} vermerkt.
2. In der x -ten Zustandsspalte wird in der i -ten Zeile die Zahl y hingeschrieben.
3. Die Regeltypenspalte wird in der i -ten Zeile mit der Zahl j versehen.

So ergibt sich eine Matrix \mathfrak{M} , welche in jeder Zeile drei Einträge enthält. Die anderen Komponenten können Null oder Nil gesetzt werden (Praktisch können diese auch leer bleiben). \mathfrak{M} wird also wie folgt gefüllt:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 t & \psi_1 & \cdots & \psi_n & R \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \begin{pmatrix} t_2 & & & & \ddots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ t_{i+1} & \cdots & y & \cdots & j \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ t_g & & & & \ddots \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

\uparrow
 x - te Regelspalte

Die Anordnung der Spalten ist natürlich willkürlich und kann von Fall zu Fall variieren. Um das Gesamtmodell nochmals zu erläutern, wird nun ein kleines Beispiel vorgestellt.

Ein Beispiel

Bekannt ist das Spiel Zahlenraten. Der User soll eine vom Rechner erzeugte Zufallszahl erraten und eingeben. Das Programm soll folgende Struktur haben:

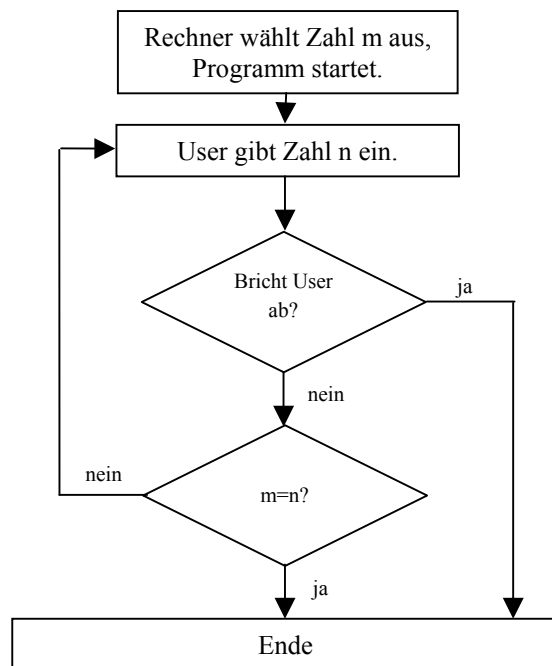


Abbildung 25, Beispielprogramm

Auf dieser Basis können nun Zustände definiert werden:

- ψ_1 : Anfangszustand, Zahlenauswahl durch den Rechner
- ψ_2 : Eingabemaske für Zahl; Kontrolle des Rechners; Abbruchmöglichkeit
- ψ_3 : Schlussbildschirm

Da $\{\psi_1; \psi_2; \psi_3\} = S_3$ augenscheinlich ein vollständiger Satz von Zuständen ist, gilt: $V_3 = S_3$. Es werden zwei Typen von Zustandsoperatoren definiert:

\mathfrak{A}^1 : Regeltyp für regulären Fortgang und Abschluss des Programms.

\mathfrak{A}^2 : Regeltyp für vom User vorgenommenen Abbruch.

Die Regelsätze können dann wie folgt erklärt werden:

$$\Xi_1 := \{\mathfrak{A}^1_{1,2}\}$$

$$\Xi_2 := \{\mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,3}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\}$$

$$\Xi_3 := \{\}$$

$\Lambda_3 = \{\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3\}$ ist dann die Verfassung des Programms P . Es gilt: P und (Λ_3, V_3) sind ununterscheidbar.

Aus diesen Festlegungen wird nun die Zustandsmatrix mit insgesamt 5 Spalten erzeugt. Die Anzahl der Zeilen ist vom Bearbeitungsweg abhängig. Hier sollen es (willkürlich) vier sein. Um die Matrix übersichtlich darzustellen, werden die jeweiligen Zeilen und Spalten mit Überschriften versehen. Für einen speziellen Bearbeitungsweg könnte sich dann folgende Matrix ergeben:

lfd. Nr.	t_i	Regeltyp	ψ_1	ψ_2	ψ_3
1	00:00:10	1	2		
2	00:01:04	1		2	
3	00:04:34	1		2	
4	00:06:21	2		3	

Ein zweiter Proband hatte etwas mehr Geduld. Es ergab sich folgende Zustandsmatrix mit 6 Zeilen:

lfd. Nr.	t_i	Regeltyp	ψ_1	ψ_2	ψ_3
1	00:00:05	1	2		
2	00:00:40	1		2	
3	00:01:12	1		2	
4	00:02:01	1		2	
5	00:04:12	1		2	
6	00:05:37	1		3	

Um die beiden Bearbeitungswege K_1 und K_2 zu vergleichen, kann deren Distanz oder Korrelation herangezogen werden. $\{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\}$ ist die Menge der Glieder der Regelkette K_1 , $\{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,3}\}$ ist Menge der Glieder der Regelkette K_2 . Es gilt dann $|\{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\}|=3$ und $|\{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,3}\}|=3$. Die Distanz $D(K_1, K_2)$ der beiden Bearbeitungswege K_1 und K_2 ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} D(K_1, K_2) &= |\{\{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\} \cup \{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,3}\} \setminus \{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\} \cap \{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,3}\}\}| \\ &= |\{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}, \mathfrak{A}^1_{2,3}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\} \setminus \{\mathfrak{A}^1_{1,2}, \mathfrak{A}^1_{2,2}\}| \\ &= |\{\mathfrak{A}^1_{2,3}, \mathfrak{A}^2_{2,3}\}|=2 \end{aligned}$$

Die beiden Bearbeitungswege sind nicht bearbeitungsähnlich, ihre Distanz ist 2. Abschließend wird nun noch die Korrelation berechnet. Insgesamt wurden zwei verschiedene Regeltypen betrachtet. Regeltyp 1 wird von Proband 1 dreimal und von Proband 2 sechsmal verwandt. Proband 2 verwandte hingegen Regeltyp 2 überhaupt nicht, Proband 1 einmal. Die Korrelation mit identischer Gewichtung der Regeltypen ergibt sich zu:

$$k_{1,2} = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{6} + \frac{0}{1} \right) = -0,5$$

6.5 Zur praktischen Umsetzung des Konzeptes

Sei D eine Menge reellwertiger Daten. Den Beobachtungen lagen die individuellen Verhaltensweisen einzelner Probanden zugrunde. In Zustandsmatrizen wurde das beobachtete Verhalten kodiert. Ziel ist es nun, die Probanden durch ihre so festgehaltenen Verhaltensweisen miteinander zu vergleichen. Auch einfaches Auszählen vergleicht Einzelbeobachtungen. Daher gehen gängige Methoden der Datenzusammenfassung (Datenreduktion), wie Methoden der Cluster-, Faktorenanalyse oder der Multidimensionalen Skalierung (MDS) oft von einer Distanzmatrix oder Ähnlichkeitsmatrix (Korrelationsmatrix) aus, die die Ergebnisse der Vergleiche numerisch kodiert. D besteht aus diesem Grund im vorliegenden Fall aus Distanzen oder Ähnlichkeiten. Die zu ermittelnden Distanzen oder Ähnlichkeiten geben, im Fall der bereits angeführten Maße, den Grad an Nichtübereinstimmung oder Übereinstimmung wieder. Um überhaupt eine brauchbare Distanz- oder Ähnlichkeitsstruktur zu erhalten, ist es oft (wie auch in diesem Fall) angezeigt, mögliche verschiedene Zustände zu einem Zustand zusammenzufassen, bzw. mögliche Regeln oder Regeltypen zu gruppieren. Brauchbarkeit wird durch die gewählte Methode der Datenzusammenfassung, deren Grundlage die zu errechnende Distanz- oder Ähnlichkeitsstruktur ist, bestimmt. Die Zusammenfassungen können dabei schrittweise erfolgen und inhaltlich oder durch die Anwendung datenanalytischer Methoden gerechtfertigt werden. Im ersten Schritt kann z.B. von der Zeit, zu der eine Regel angewandt wurde, abstrahiert werden. In einem zweiten Schritt kann es sinnvoll sein vom situativem Umfeld, also den jeweiligen Aufgaben, zu abstrahieren und sich somit ausschließlich auf verwandte Regeltypen zu beschränken. Die Anzahl dieser Schritte bestimmt den Informationsverlust, den das Ermitteln einer brauchbaren Distanz- oder Ähnlichkeitsstruktur erforderte. Eine formale Theorie dieses Informationsverlustes ist in Vorbereitung (vgl. [68]). Vorgenommene Zusammenfassungen verringern die „Schärfe“ der schließlich gewonnenen Distanz- oder Ähnlichkeitsmatrix. Dennoch sollte garantiert sein, dass die Distanzen mit wachsender Nichtübereinstimmung, bzw. Ähnlichkeiten mit wachsender Übereinstimmung ebenfalls streng monoton wachsen, die Distanz-, bzw. Ähnlichkeitsmatrix also mindestens ordinale Signifikanz hat. Wie die jeweilige Ähnlichkeit, bzw. Unähnlichkeit dabei gefasst wird, kann im Fall der vorliegenden Untersuchung nur inhaltlich in Bezug auf diese Arbeit motiviert werden, da vergleichbare Erfahrungsberichte fehlen und so keinerlei Rückgriff möglich scheint. An dieser Stelle sei erwähnt, dass sich eine Distanzmatrix (d_{ij}) deren Werte zwischen null und eins liegen, durch den Ansatz $c_{ij} = a \cdot d_{ij} + t$ in an einen Korrelationskoeffizienten angelehnte Ähnlichkeitsmatrix überführen lässt (vgl. Abschnitt 6.3.8). Obwohl Transformationen der Art $x \rightarrow a \cdot x + t$ affin sind, hat (c_{ij}) natürlich das gleiche Datenniveau wie (d_{ij}) . Das als ordinal angenommene Datenniveau in den vorliegenden Datenanalysen wird durch Transformationen dieser Art nicht beeinflusst. Methoden der metrischen Faktoren-, Regressionsanalyse oder umfassender allgemeiner linearer Strukturgleichungsmodelle (LISREL, vgl. [94], Kapitel IV; aber auch [136]) erscheinen somit aus zweierlei Gründen als ungeeignet. Zum ersten misst der diesen Methoden zugrunde liegende „Neymann-Pearson-Korrelationskoeffizient“ Übereinstimmungen im Probandenverhalten nicht sinnvoll auf ordinalem Niveau. Zum zweiten berücksichtigen lineare Modelle, wie sie der Faktoren-, der Regressionsanalyse oder allgemeinen linearen Strukturgleichungen meist zugrunde liegen, kein Datenniveau, das nicht

wenigstens intervallskaliert ist. Während der zweite Grund bekannt ist, soll der erste im Folgenden durch ein Beispiel erörtert werden:

O.B.d.A. kann angenommen werden, dass Verhaltensweisen von Probanden in Anlehnung an die Darstellungsweise der formalen Begriffsanalyse durch „Einsen“ und „Nullen“ kodiert sind. Betrachtet werden nun je zwei Probanden P_1, P_2 und P_3, P_4 , deren Verhaltensweisen durch die Vektoren $(1,1,1,1,0)$, $(1,1,1,0,1)$ und $(1,0,0,0,0)$, $(1,1,1,1,0)$ beschrieben sei. Dann bedeutet eine „Eins“ in einer bestimmten Komponente, dass ein ganz bestimmtes durch die Komponente kodiertes Verhalten auftrat, während eine „Null“ das Nichtauftreten dieser bestimmten Verhaltensweise anzeigt. Offensichtlich ist die Übereinstimmung zwischen den Probanden P_1, P_2 höher als zwischen den Probanden P_3, P_4 . Andererseits gilt für den entsprechenden Neymann–Pearson–Korrelationskoeffizienten $\text{cor}(P_1, P_2) < 0$ und $\text{cor}(P_3, P_4) > 0$, was zumindest die Nichteignung dieses Koeffizienten unterstreicht, wenn die einzelnen Komponenten der entsprechenden Vektoren gleich zu gewichten sind. Nehmen wir an, dass es sich im vorliegenden Beispiel um die Kodierung von drei Verhaltensweisen handelt, wobei die erste durch die ersten drei Komponenten Vektoren dargestellt, die zweite und dritte durch die übrigen Komponenten repräsentiert wird, so ändert sich am zuvor gefassten Resultat nichts, wenn die so entstandenen Vektorenpaare $(3,1,0)$; $(3,0,1)$ und $(1,0,0)$; $(3,1,0)$ miteinander gemäß des üblichen Korrelationskoeffizienten verglichen werden und der Vergleich der Probanden durch Größenvergleich der Koeffizienten erfolgt. Um die Frage zu beantworten, welche Methoden der Datenzusammenfassung überhaupt adäquat sind, sei im Folgenden, um die Abgrenzung von der gegebenen Datenmenge D zu gewährleisten, eine beliebige Menge D' reellwertiger Daten angenommen, die prinzipiell sinnvolle und optimale Datenzusammenfassungen erlaubt. In der Praxis besteht D' aus allen möglichen Daten, die durch eine vorgegebene Reduktionsmethode prinzipiell analysierbar sind. Sinnvolle Datenzusammenfassungen werden in Methoden der Cluster-, Faktorenanalyse, MDS usw. meist durch minimale oder maximale Werte reellwertiger Funktionen G auf D' definiert. Die Wahl von G konzentriert die Frage nach adäquaten Methoden der Datenzusammenfassung auf die Frage nach der Adäquatheit von G . Zur Präzisierung der Adäquatheitsfrage sei G eine beliebige aber fest gewählte reellwertige Funktion auf D' und $D'' \supset D'$ der größtmögliche Bereich, für den G definiert ist. In der allgemeinen Theorie (vgl. [69; 70; 71]) sind $D' \subset D''$ Mengen reellwertiger messbarer Abbildungen auf abstrakten messbaren Räumen. Sei $T(D'')$ die Menge aller vernünftigen Bijektionen $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T(D'') := \{T(D') \mid D' \in D''\} = \bar{D''}$ (vgl. [71]). Da sich Datenzusammenfassungen u.U. auf beliebige (nichtleere) Teilmengen E'' von D'' beschränken, wird hier für jede nichtleere Teilmenge E'' von D'' unter $S(E'')$ die Menge aller Teilmengen E^+ von D'' verstanden, für die eine Bijektion $T \in T(D'')$ existiert mit $E^+ = T(E'')$. Die Invariantenmenge $I_G(E'')$ von G bezüglich E'' ist schließlich die Menge aller Bijektionen $T \in T(D'')$, die für alle Mengen $E^+ \in S(E'')$ folgende Äquivalenz erfüllen:

„ $L \in E^+$ ist genau dann eine optimale Lösung von G bezüglich E^+ , wenn $T(L)$ eine optimale Lösung von G bezüglich $T(E^+)$ ist.“

Man beachte, dass $T(D'')$ eine Gruppe und $I_G(E')$ eine Untergruppe von $T(D'')$ ist. Durch die Wahl von G wird das Datenniveau von D' also genau dann **nicht** vollständig berücksichtigt, wenn **mindestens eine**, das Datenniveau von D'' definierende Transformation $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass für eine optimale Lösung L von G bezüglich einer nichtleeren Teilmenge E^+ von D'' das transformierte Datum $T(L)$ keine optimale Lösung von G bezüglich $T(E^+)$ ist. Sei $\bar{S}(D')$ die das Datenniveau von D'' definierende Gruppe von Transformationen. Dann ist $\bar{S}G: D'' \rightarrow \mathbb{R}$ also genau dann **adäquat**, wenn für alle nichtleeren

Teilmengen E'' von D'' die Inklusion $\underline{S}(D'') \subset I_G(E'')$ gilt. Diese Bedingung ist zu jeder der beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

U1: Für alle Daten $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in D''$ und alle Transformationen $T \in \underline{S}(D'')$ gilt:

$$G(\mathcal{D}) < G(\mathcal{D}') \Rightarrow G(T(\mathcal{D})) < G(T(\mathcal{D}')) .$$

U2: Für alle Daten $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in D'$ und alle Transformationen $T \in \underline{S}(D')$ gilt:

$$G(\mathcal{D}) \leq G(\mathcal{D}') \Rightarrow G(T(\mathcal{D})) \leq G(T(\mathcal{D}')) .$$

Vergleiche hierzu [69], Proposition 2.2. In [69; 70] werden innerhalb des allgemeinen Rahmens messbarer reellwertiger Funktionen, Funktionen $G: D' \rightarrow \mathbb{R}$ charakterisiert, wenn $\underline{S}(D')$, wie in der empirischen Unterrichtsforschung z.T. vorauszusetzen ist, auch nicht-lineare (nicht affine) Transformationen enthält. In [69; 71] werden diese Ergebnisse auf Methoden der Faktoren-, Clusteranalyse, MDS usw. angewandt. Da letztere Methoden auch im Rahmen dieser Untersuchung benutzt werden, wird geprüft, inwieweit die verwandten Methoden adäquat sind. Das den Argumentationen zugrunde liegende Datenniveau wurde in Bezug auf die Daten dieser Arbeit gewählt. Folgendes Beispiel soll diesen Abschnitt abrunden und den Adäquatheitsbegriff nochmals anschaulich erläutern.

Beispiel:

2 Probanden werden vier Aufgaben vorgelegt. Die Bepunktung erfolgt durch zwei unabhängige Gutachter. In folgender Tabelle werden die Punktzahlen des ersten Gutachters wiedergegeben.

Aufg./Prob.	P1	P2
A1	1	3
A2	5	3
A3	5	3
A4	7	8

D besteht dann aus den Vektoren $(1,5,5,7)$ und $(3,3,3,8)$. Der zweite Gutachter vergab identische Punktzahlen bis auf die Aufgaben, die mit drei Punkten versehen wurden. Nach dem Vergleich der Gutachten wird im Anschluss davon ausgegangen, dass die Punktzahl 3 unsicher ist. Man hätte ebenso 4 statt 3 Punkten vergeben können. Daher wird ein fester Ordnungsautomorphismus $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T(1) = 1, T(2)=2, T(3)=4, T(5)=5, T(6)=6, T(7)=7$ und $T(8) = 8$ betrachtet. Sei \mathbf{T} die von T erzeugte Gruppe. $D' := D''$ besteht dann aus allen Vektoren $(T'(1), T'(5), T'(5), T'(7))$ und $(T'(3), T'(3), T'(3), T'(8))$ mit $T' \in \mathbf{T}$. Dies bedeutet, dass \mathbf{T} das Datenniveau der vergebenen Punktzahlen repräsentiert. Nun betrachtet man das Gütekriterium $G: D'' \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $G(a,b,c,d) = a+b+c+d$ für alle Tupel $(a,b,c,d) \in D''$. Die durch G definierte Reduktionsmethode ist nicht adäquat. Dazu sei $E := D'$. Dann gilt $G(3,3,3,8) = 17 < G(1,5,5,7) = 18$. Die entsprechende Invariantengruppe $I_G(E)$ enthält daher ausschließlich Ordnungsautomorphismen $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(3)+F(3)+F(3)+F(8) < F(1)+F(5)+F(5)+F(7).$$

Wäre die durch G definierte Reduktionsmethode nun adäquat, so müsste entsprechend des gefassten Adäquatheitsbegriffs T in $I_G(E)$ enthalten sein, d.h. es müsste

$$G(T(3), T(3), T(3), T(8)) < G(T(1), T(5), T(5), T(7))$$

gelten (vgl. U1). Nun gilt aber $G(T(3), T(3), T(3), T(8))=20$ und $G(T(1), T(5), T(5), T(7))=18$, was zum Widerspruch führt.

Anbei noch eine kurze Bemerkung zur Umsetzung der entwickelten Konzepte. Um die jeweiligen Ähnlichkeits- bzw. Distanzmaße schnell berechnen zu können, wurde das Zustandskonzept in einer Tabellenkalkulation implementiert. Die Entscheidung fiel auf das Programm EXCELTM von Microsoft. Die Programmierung erfolgte größtenteils im hier zu Verfügung gestellten VISUAL-BASICTM Editor. Ein Programm zur Generierung von Dendrogrammen wurde in VISUAL-BASICTM 5 erstellt. Die Programme wurden vor ihrem Einsatz, soweit wie möglich und vorhanden, mit Beispielen aus der Literatur getestet.

6.5.1 Berechnung der Korrelation von Bearbeitungswegen

Aus den Zustandsmatrizen kann durch einfaches Abzählen eine Häufigkeitsmatrix erstellt werden. Werden n Regeltypen und p Probanden zugrunde gelegt, erhält man eine $(n \times p)$ -Matrix. Die Komponente $h_{i,j}$ dieser Matrix ist durch $h(\mathbf{R}_i, \mathbf{K}_j)$ gegeben. Die Korrelation von zwei Bearbeitungswegen wurde in 6.3.8 festlegt. Der folgende Term ist zum definierten äquivalent, jedoch leichter zu implementieren:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{M}}_i &= \min \{ h(\mathbf{R}_i, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}_i, \mathbf{K}_f) \} \\ \overline{\mathcal{M}}_i &= \max \{ h(\mathbf{R}_i, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}_i, \mathbf{K}_f) \} \\ k_{e,f} &= -1 + 2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^s g_i \cdot \text{sgn}(\overline{\mathcal{M}}_i)} \sum_{i=1}^s \begin{cases} \frac{\underline{\mathcal{M}}_i}{\overline{\mathcal{M}}_i} \cdot g_i & , \quad \overline{\mathcal{M}}_i \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit entsprechender Korrelationsmatrix \mathcal{K} . Die Matrix \mathcal{K} erfüllt die zuvor aufgestellten Forderungen an eine Korrelationsmatrix und ist leicht zu implementieren. Da aus meiner Einschätzung kein Verhalten besonderer Berücksichtigung bedarf, wird der Gewichtungsfaktor g_i durchweg eins gesetzt. Der Term zur Berechnung von $k_{e,f}$ vereinfacht sich dann wie folgt:

$$k_{e,f} = -1 + 2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^s \text{sgn}(\overline{\mathcal{M}}_i)} \sum_{i=1}^s \begin{cases} \frac{\underline{\mathcal{M}}_i}{\overline{\mathcal{M}}_i} & , \quad \overline{\mathcal{M}}_i \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

6.5.2 Zur Verwendung multivariater Verfahren

Die Verwendung Struktur-prüfender multivariater Analysemethoden, wie der konfirmativen Faktorenanalyse, der Regressions- oder Varianzanalyse, schien aufgrund der gesetzten Fragestellung und der Datenstruktur (vergleiche vorhergehende Ausführungen) nicht sinnvoll. Vorab wurde aus diesem Grund eine Beschränkung auf strukturentdeckende Verfahren vorgenommen. Ziel ist es schließlich, Bearbeitungswege von Probanden miteinander zu vergleichen. Mögliche Gruppierungen von Probanden sollten a priori nicht vermutet werden. Übliche Verfahren sind aus diesem Grund explorative Verfahren wie die der Faktorenanalyse, der Clusteranalyse und der Multidimensionalen Skalierung (vgl. [13]) aber auch der Formalen Begriffsanalyse (vgl. [45]). Auf weitere Ausführungen zur formalen Begriffsanalyse wird an dieser Stelle verzichtet, da sie ohnehin adäquat ist. Die Faktorenanalyse dient der Reduktion von beobachteten Merkmalen auf wenige latente Variablen. Es wird also versucht, auf eigentliche zugrundeliegende Variablen zu schließen. Zur Durchführung einer üblichen Faktorenanalyse müssen die erhobenen Daten für eine Korrelationsanalyse hinreichendes Skalenniveau

haben. Sie müssen intervallskaliert, also quantitativ sein ([13], S. 298; [39], S. 662). Ein Problem bei der Analyse der vorliegenden Daten unter Berücksichtigung von Modellen der Faktorenanalyse ist das Schätzen der Korrelationen (vgl. [55] und Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts) und der anschließenden Weiterverarbeitung. Konzepte zur ordinalen Faktorenanalyse existieren zwar, genügen aber nicht dem hier entwickelten Adäquatheitsbegriff, so dass die Verwendung qualitativer Daten in selbigen mit Problemen behaftet ist, welche nicht zuletzt systematische Untersuchungsfehler mit sich bringen können ([167], S. 301ff).

Um diesen Problemen zu vorbeugen, wurden lediglich die Verfahren der Clusteranalyse und Multidimensionalen Skalierung zur Analyse der Matrizen \mathcal{K} und \mathcal{D} eingesetzt, was zur Auswertung der vorliegenden Untersuchung auch hinreichend erscheint. Für die Analyse formaler Kontexte wurde die formale Begriffsanalyse verwandt. Die Zielsetzungen und Erwartungen an Ergebnisse der jeweiligen Analysen werden im Folgenden vorgestellt. Diese Ausführungen stellen eine Grundlage der Auswertung dar. Ebenfalls werden den Analysemethoden zugrunde liegende Gütekriterien diskutiert.

6.5.3 Einsatz von Clusteranalyse zur Auswertung

Zur Spezifizierung sei \mathcal{P} eine nichtleere Menge von Partitionen der gegebenen Probandenmenge \mathbf{P} . Da unbekannt ist, in wie viele Gruppen \mathbf{P} zerfällt, kann \mathcal{P} zunächst nicht näher spezifiziert werden. Wir gehen in einem ersten Schritt davon aus, dass jedem Element (Cluster) A einer Partition $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ eine Heterogenität $h(A) \geq 0$ zugeordnet ist. Dem zugrundeliegenden Datenniveau entsprechend hat $h(A)$ lediglich ordinale Signifikanz, ist also lediglich bis auf Ordnungsautomorphismen auf den nichtnegativen reellen Zahlen bekannt. Gesucht ist nun ein Gütekriterium $G: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, das den folgenden beiden Forderungen genügt:

(AD) Adäquatheit: G ist adäquat im Sinne des zuvor gefassten Adäquatheitsbegriffs.

(MO) Monotonie: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{P}$ beliebige Partitionen, so dass jedem Cluster $A \in \mathcal{A}$ eineindeutig ein Cluster $B \in \mathcal{B}$ mit $h(A) \leq h(B)$ zugeordnet werden kann. Dann gilt: $G(\mathcal{A}) \leq G(\mathcal{B})$.

Umgangssprachlich drückt die Monotoniebedingung die naheliegende Forderung aus, dass Partitionen, deren Cluster eine höhere Heterogenität (größere innere Unähnlichkeit) aufweisen als Cluster anderer Partitionen, auch von geringerer Güte sind. Weil dies in tatsächlichen empirischen Untersuchungen (fast) immer der Fall ist, wird angenommen, dass alle Cluster A , die in irgendeiner Partition $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ vorkommen, positive Heterogenität haben. Mit Hilfe von Korollar 4.2.3 aus [69] lassen sich nun alle Gütekriterien $G: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Bedingungen **(Ad)** und **(Mo)** erfüllen, in einfacher Weise charakterisieren. Sei \mathcal{G} die Menge dieser Gütekriterien. In Anlehnung an die Literatur (vgl. [64]) lässt sich \mathcal{G} in zwei (nicht-disjunkte) Gruppen von Gütekriterien aufteilen, nämlich zum einen in die Gruppe \mathcal{G}_m derjenigen Gütekriterien, die die mittlere Heterogenität einer Partition $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ messen, also durch die Ungleichungen

$$\min_{A \in \mathcal{A}} h(A) \leq G(\mathcal{A}) \leq \max_{A \in \mathcal{A}} h(A)$$

charakterisiert sind, und die Gruppe \mathcal{G}_t derjenigen Gütekriterien, die die totale Heterogenität einer Partition $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ messen, also durch die Ungleichung

$$\max_{A \in \mathcal{A}} h(A) \leq G(\mathcal{A})$$

charakterisiert sind.

Während \mathcal{G}_m , vom interpretativen Standpunkt aus, abgesehen von denjenigen Gütekriterien, die auch in \mathcal{G}_t enthalten sind, keine brauchbaren Gütekriterien enthält, besteht \mathcal{G}_t

aus einem, bis auf Ordnungsautomorphismen auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$, eindeutig bestimmten Gütekriterium G_{\max} , das für alle Partitionen $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ durch

$$G_{\max}(\mathcal{A}) := \max_{A \in \mathcal{A}} h(A)$$

definiert ist (vgl. [69], Korollar 4.2.5, Korollar 4.2.7 und Bemerkung 4.2.8). Da nahezu alle in der Literatur besprochenen Gütekriterien (für ein Heterogenitätsmaß) die totale Heterogenität einer Partition (Klassifikation) messen, ist es also gelungen, bei vorgegebenem Heterogenitätsmaß, das lediglich ordinale Signifikanz hat, ein bis auf Ordnungsautomorphismen eindeutig bestimmtes Gütekriterium lediglich durch die Bedingungen **(Ad)** und **(Mo)** zu charakterisieren.

An dieser Stelle soll festgehalten werden, dass obige Überlegungen auch für beliebige Mengen von Klassifikationen von \mathbf{P} gelten, Klassifikationen also, die nicht notwendig Partitionen von \mathbf{P} sind.

Den konkreten Untersuchungen liegt allerdings ein Ähnlichkeits- oder Distanzmaß zugrunde, das lediglich ordinale Signifikanz hat. Um zu obigen Überlegungen analoge Betrachtungen durchführen zu können, wird daher im Folgenden von einem definiten Distanzmaß d ausgegangen, das lediglich ordinale Signifikanz hat. Definit bedeutet, dass für alle Probanden $x \neq y \in \mathbf{P}$ stets $d(x, y) > 0$ gilt.

Sei $\Omega := \{A \mid \exists \mathcal{A} \in \mathcal{P} (A \in \mathcal{A})\}$. Es sei angenommen, dass jedes Cluster $A \in \Omega$ mindestens zwei Elemente enthält. Im zweiten Schritt wird ein (geeignetes) Heterogenitätsmaß $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ gesucht. Dazu sei für jede Menge $A \in \Omega$ die Menge AA durch $AA := \{\{x, y\} \subset A \mid x \neq y\}$ gegeben. In Analogie zu **(Ad)** und **(Mo)** wird verlangt, dass h folgende beiden Forderungen erfüllt:

(Ad') (Adäquatheit): h ist adäquat im Sinne des Adäquatheitsbegriffs.

(Mo') (Monotonie): Seien $A, B \in \Omega$ beliebige Cluster, so dass jedem Paar $\{x, y\} \in AA$ eineindeutig ein Paar $\{x', y'\} \in BB$ mit $d(x, y) \leq d(x', y')$ zugeordnet werden kann. Dann gilt $h(A) \leq h(B)$.

Umgangssprachlich drückt die erneute Monotoniebedingung die naheliegende Forderung aus, dass Cluster, die unähnlichere Paare von Probanden enthalten als andere Cluster auch von größerer Heterogenität sind.

Zu den Überlegungen des ersten Schritts analoge Überlegungen liefern nun das bis auf Ordnungsautomorphismen auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$ eindeutig bestimmte Heterogenitätsmaß $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, das für alle $A \in \Omega$ durch

$$h(A) := \max_{\{x, y\} \in AA} d(x, y)$$

definiert ist. Das bis auf Ordnungsautomorphismen eindeutig bestimmte Gütekriterium für ein vorgegebenes Distanzmaß d , das lediglich ordinale Signifikanz hat, ist also für jede Partition $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$ durch

$$G_{\max}^d(\mathcal{A}) := \max_{A \in \mathcal{A}} h(A)$$

definiert. Eine optimale Partition $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$ wird daher durch das Erfülltsein der Gleichung

$$G_{\max}^d(\mathcal{C}) := \min_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}} G_{\max}^d(\mathcal{A})$$

beschrieben. Im Jahre 1963 hat Ward zur Anzahlbestimmung relevanter Cluster und zur (lokalen) Optimierung des Varianzkriteriums ein agglomeratives hierarchisches Verfahren, nämlich den sogenannten Ward-Algorithmus, vorgeschlagen (vgl. [169]). Das oben entwickelte Gütekriterium für Distanzmaße von lediglich ordinaler Signifikanz wird als das Maximumkriterium der Clusteranalyse bezeichnet. Bei vorgegebener Clusteranzahl ist ein Algorithmus zu seiner Optimierung bekannt. Im Rahmen der vorliegenden Daten ist die

Anzahl der Cluster jedoch unbekannt. Es ist daher angezeigt, in Analogie zu Ward vorzugehen, also durch ein agglomeratives hierarchisches Verfahren kombiniert mit einem eventuellen Austauschverfahren, Anzahl der Cluster und (lokal) optimale Partition bezüglich des Maximumkriteriums zu bestimmen. Dies bedeutet, dass ein agglomeratives hierarchisches Verfahren gesucht ist, das in einer Partition \mathcal{A} von \mathbf{P} genau dann zwei Cluster $A, B \in \mathcal{A}$ zu einem neuen Cluster vereinigt, wenn

$$\max_{\{x,y\} \in (A \cup B)(A \cup B)} d(x,y) = \min_{C \in \mathcal{A}, D \in \mathcal{A}} \max_{\{x',y'\} \in (C \cup D)(C \cup D)} d(x',y')$$

gilt. Das eindeutig bestimmte agglomerative hierarchische Verfahren, das diese Forderung erfüllt, ist das sogenannte „Complete-Linkage-Verfahren“ (entferntester Nachbar). In der Regel wird die Anzahl der relevanten Cluster durch ein Abbruchkriterium bestimmt, das auf jeder neuen Hierarchiestufe den Heterogenitätszuwachs misst und dann einen Abbruch vorschlägt, wenn dieser zu groß ist. Da das den vorliegenden Untersuchungen zugrunde liegende Distanzmaß lediglich ordinale Signifikanz hat, ist in diesem Fall der numerisch gemessene Wert des Heterogenitätszuwachses nicht unmittelbar brauchbar. Man ist stattdessen gezwungen, die auf jeder neuen Hierarchiestufe durch Vereinigung vorhergehender Cluster neugewonnenen Cluster inhaltlich zu interpretieren, um dann abzubreaken, wenn inhaltlich unvereinbare (zu unähnliche) Cluster zu einem neuen Cluster vereinigt wurden. Diese Vorgehensweise hat im vorliegenden Fall darüber hinaus den Vorteil, dass nach Erreichen der geeigneten Hierarchiestufe unter Umständen keine weiteren Optimierungsversuche notwendig sind, weil von vorneherein sicher ist, dass ein zusätzlicher Austausch von Probanden tatsächlich inhaltlich unähnliche Probanden zusammenfassen würde. Natürlich kann es vorkommen, dass \mathbf{P} Ausreißer (Probanden, deren Verhalten vom Verhalten der übrigen Probanden sehr stark abweicht), enthält. Diese Ausreißer bilden dann einelementige Cluster, deren Durchmesser (Heterogenität) Null ist. Um dennoch unsere obigen Überlegungen, die ja von Null verschiedene Heterogenitäten voraussetzen, anwenden zu können, betrachten wir keine Partitionen von \mathbf{P} , sondern statt dessen Partitionen von \mathbf{P} vermindert um die Menge der Ausreißer, was, wie bereits oben erwähnt wurde, möglich ist. Tatsächlich tragen Ausreißer bei einem agglomerativen hierarchischen Verfahren auf keiner relevanten, also vor dem Abbruch gebildeten, Hierarchiestufe zu neuer Clusterbildung bei.

Anbei noch einige technische Bemerkungen: SPSS bietet im Rahmen der üblichen Bedienung lediglich die Berechnung von Clustern aus Ausgangsdaten ([87], Kapitel 17; [13], Kapitel 7). Die definierten Ähnlichkeits- bzw. Distanzmaße sind jedoch nicht in SPSS implementiert. Aus diesem Grund wurden die entsprechenden Algorithmen in EXCELTM programmiert, um auf Basis der vorgestellten Ähnlichkeits-, bzw. Unähnlichkeitsmaße entsprechende Analysen durchführen zu können. Zur Erstellung von Dendrogrammen wurde ein Programm in VISUAL-BASICTM 5 geschrieben.

6.5.4 Einsatz der multidimensionalen Skalierung zur Auswertung

Ziel der multidimensionalen Skalierung (MDS) ist in diesem Fall die Beschreibung von Bearbeitungswegen durch ein Modell mit möglichst wenig Dimensionen. Zur Interpretation sind ein bis maximal drei Dimensionen geeignet, da in diesen Fällen die Objekte graphisch repräsentiert werden können, ohne auf Projektionen zurückgreifen zu müssen, wie sie in der Version 10 von SPSS implementiert sind. Sei (d_{ij}) die Matrix der beobachteten Distanzen zwischen den Probanden $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$. Im Allgemeinen ist das Ziel einer MDS die Approximation von (d_{ij}) durch eine Distanzmatrix (δ_{ij}) , die metrische (in der Regel euklidische) Distanzen zwischen entsprechenden Punkten x_1, \dots, x_N in einem möglichst niedrigdimensionalen Raum misst. Sind die Distanzen d_{ij} nicht intervallskaliert, benutzt man zur Ermittlung der Punkte

x_1, \dots, x_N und der entsprechenden Distanzmatrix (δ_{ij}) Verfahren, die auf sogenannten Stressmaßen beruhen und bis auf (geringe) Modifikationen dem klassischen Verfahren von Kruskal (vgl. [102], [103]) entsprechen. Zur Durchführung einer nichtmetrischen MDS sind Rangwerte, also ordinal skalierte Daten, ausreichend. Im vorliegenden Fall weist die MDS aus diesem Grund Vorteile gegenüber einer Faktorenanalyse auf. Lediglich die Reihenfolge der Distanzen muss erhalten bleiben, um das Ergebnis nicht zu verändern ([13], S. 505). Im Fall der vorliegenden Untersuchung ist es also sinnvoll, zu versuchen, jedem Probanden bezüglich jedes zum Vergleich herangezogenen Ähnlichkeits-, bzw. Distanzmaßes einen ein bis dreidimensionalen Vektor zuzuordnen (vgl. [55], S. 378f, [13], S. 526). Ob die Repräsentation hinreichend ist und welche Dimension schließlich gewählt wird, ist abhängig von einigen Kenn- und Erfahrungswerten, wie sie auch in der Literatur beschrieben werden. Da zur Auswertung SPSS10 genutzt wurde, werden auch die hier zur Verfügung gestellten Gütekriterien zur Beurteilung herangezogen. Angeboten wird u.a. Kruskals erstes Stressmaß. Der Stress einer Lösung sollte möglichst niedrig sein, um den Ausgangsdaten zu genügen (vgl. [39], S. 682f). Da der Stress jedoch mit steigender Dimension streng monoton fällt, ist sein Wert sicher ebenso zentral zur Wahl der Dimension, wie die Interpretierbarkeit der Berechnungen. Da diese Stressmaße jedoch dem zuvor gefassten Adäquatheitsbegriff nicht entsprechen, ist die Bedeutung, die ihnen im Fall der vorliegenden Untersuchung zukommt, eher gering. Auch Stressdiagramme können, ähnlich wie Screeplots in der Faktorenanalyse, zur Wahl der Dimension herangezogen werden (vgl. [24], S. 108ff). Ein absolutes Maß für die Güte einer MDS ist hiermit jedoch nicht gewonnen. Um den in der Literatur beschriebenen Beurteilungsverfahren gerecht zu werden, beschränke ich mich auf MDS, welche Stresswerte unterhalb von 0,2 bzw. 20% liefern, wenn zusätzlich die Forderungen an die Dimensionalität (max. 3) erfüllt ist. Dies entspricht in Kruskals Bewertungsschema von Stresskoeffizienten ausreichender Güte (vgl. [24], S. 102). Angemerkt und besonders betont werden soll an dieser Stelle nachhaltig, welchen Stellenwert Kruskal und Shepard selbst diesen Gütemaßen einräumen:

„Kruskal [persönliche Mitteilung] und andere [siehe z.B. Shepard, 1974] haben übrigens später die Einführung dieser Stress-Bewertungen noch wiederholt bedauert, da viele Verwender der ordinalen MDS glaubten, hier ein sicheres absolutes Kochbuch-Kriterium für die Güte einer MDS-Lösung im formalen oder sogar im inhaltlich-theoriebildenden Sinn zu haben. Das ist natürlich reiner Unsinn, da eben nicht unabhängig von der Art der Daten und der Struktur-Erwartungen anzugeben ist, wie genau eine Konfiguration die Proximitäten zu repräsentieren hat, um sinnvoll zu sein: was im einen Fall ausreichend exakt ist, ist es bei anderer Forschungsabsicht nicht.“

([24], S. 102)

Wie Eingangs bereits erwähnt wurde, sind im Sinne des entwickelten Adäquatheitsbegriffs die in der Literatur im Rahmen nichtmetrischer MDS diskutierten Stressmaße für nicht intervallskalierte Distanzen ungeeignet. Das im Folgenden definierte Stressmaß umgeht viele der Schwierigkeiten üblicher Stressmaße, da es speziell für Daten auf ordinalem Niveau konstruiert wird. Dieser Stress ist letztendlich auch das Gütemaß, das zur Auswahl von Punktkonfigurationen herangezogen wird und somit die Grundlage der Auswertung in dieser Arbeit darstellt. Da an dieser Stelle noch keine Iteration zur Optimierung von Punktkonfigurationen vorgeschlagen wird, sind wir gezwungen, auf bereits implementierte Verfahren zurückzugreifen und deren Konfigurationsvorschlag anschließend mit Hilfe des nun entwickelten Stressmaßes zu beurteilen.

Die Distanzmaße d und ∂ seien vorgegeben. Zusätzlich seien injektive (Rang)abbildungen

$$r_1: \{d_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \rightarrow \mathbb{N} \text{ und}$$

$$r_2: \{\partial_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \rightarrow \mathbb{N}$$

definiert, die es erlauben, d_{ij} und ∂_{ij} mit ihren entsprechenden Rängen innerhalb der Menge der entsprechenden Distanzwerte zu identifizieren. Im Folgenden ist aus diesem Grund sowohl mit d_{ij} als auch mit ∂_{ij} jeweils der Rangplatz gemeint.

Unter einer Inversion $i(d, \partial)$ soll ein Paar $((i, j), (s, t))$ mit $(1 \leq i < j \leq n, 1 \leq s < t \leq n)$ verstanden werden, das eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\mathbf{I1}: d_{ij} < d_{st} \wedge \partial_{ij} \geq \partial_{st}.$$

$$\mathbf{I2}: d_{ij} = d_{st} \wedge \partial_{ij} \neq \partial_{st}.$$

$$\mathbf{I3}: d_{ij} > d_{st} \wedge \partial_{ij} \leq \partial_{st}.$$

Wenn

$$K := \frac{1}{2} n(n-1) \text{ ist, dann wird mit}$$

$$U := \binom{K}{2} = \frac{1}{2} K(K-1)$$

die größte Anzahl möglicher Inversionen für eine gegebene Konfiguration festgelegt. Sei $I(d, \partial)$ die Menge der Inversionen $i(d, \partial)$. Man schreibt $I(d, \partial)$ als Tupel $((i, j), (s, t)) := (((i, j), (s, t)))_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq s < t \leq n, ((i, j), (s, t)) \in I(d, \partial)}$, wobei die Reihenfolge der Inversionen beliebig ist. In [71] wird bewiesen, dass jedes (vernünftige) adäquate Stressmaß $S(d, \partial)$ eine Funktion $F((i, j), (s, t))$ ist, die bezüglich Permutationen der Komponenten invariant ist. In Anlehnung an die Literatur werden die folgenden zwei Bedingungen betrachtet, die als strenge Monotoniebedingung (**SMO**) bzw. Monotoniebedingung (**MO**) bekannt sind:

$$\mathbf{SMO}: d_{ij} \leq d_{st} \Leftrightarrow \partial_{ij} \leq \partial_{st} \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq s < t \leq n.$$

$$\mathbf{MO}: d_{ij} \leq d_{st} \Rightarrow \partial_{ij} \leq \partial_{st} \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq s < t \leq n.$$

Soll $S(d, \partial)$ lediglich **MO** berücksichtigen, so betrachtet man diejenige Teilmenge $I'(d, \partial)$ von $I(d, \partial)$, die ausschließlich Inversionen $((i, j), (s, t))$ enthält, die eine folgender Bedingungen erfüllen.

$$\mathbf{I'1}: d_{ij} < d_{st} \wedge \partial_{ij} > \partial_{st}.$$

$$\mathbf{I'2}: d_{ij} = d_{st} \wedge \partial_{ij} \neq \partial_{st}.$$

$$\mathbf{I'3}: d_{ij} > d_{st} \wedge \partial_{ij} < \partial_{st}.$$

Auch eine Funktion $F((i, j), (s, t))$, die lediglich von Inversionen abhängt, die eine der Bedingungen **I'1**, **I'2** oder **I'3** erfüllen, repräsentiert ein Stressmaß $S(d, \partial)$. Zur näheren Bestimmung von $S(d, \partial)$ wird jeder Inversion $((i, j), (s, t)) \in I(d, \partial)$ eine Länge $l((i, j), (s, t))$ zugeordnet, die wie folgt durch

$$l((i, j), (s, t)) := |d_{ij} - d_{st}| + |\partial_{ij} - \partial_{st}|$$

definiert wird. Nun wird zweierlei unterschieden:

1. $S(d, \partial)$ hängt lediglich von der Anzahl der Inversionen ab, was bedeutet, dass die Länge der Inversionen unberücksichtigt bleibt.
2. $S(d, \partial)$ hängt sowohl von der Anzahl der Inversionen als auch von der Länge der Inversionen ab.

Im ersten Fall soll $S(d, \partial)$ mit zunehmender Inversionszahl streng monoton steigen. Daraus resultieren zwei bis auf streng monoton steigende reelle Transformationen eindeutig bestimmte adäquate Stressmaße, die den relativen Anteil der tatsächlichen Inversionen an der größtmöglichen Anzahl von Inversionen messen, nämlich

$$S_{\text{smo}}^I(d, \partial) := \frac{1}{U} |I(d, \partial)|$$

im Falle strenger Monotonie (vgl. **SMO**) und

$$S_{\text{mo}}^I(d, \partial) := \frac{1}{U} |I'(d, \partial)|$$

im Falle bloßer Monotonie (vgl. **MO**). Wird jeder Inversion $((i,j),(s,t)) \in I(d, \partial)$ oder $((i,j),(s,t)) \in I'(d, \partial)$ eine positive reelle Zahl zugeordnet, die die Länge $l((i,j),(s,t))$ von $((i,j),(s,t))$ berücksichtigt, dann impliziert die Ungleichung

$$|I'(d, \partial)| \leq |I(d, \partial)| \leq U,$$

dass jedes adäquate Stressmaß $S(d, \partial)$, das obigem zweiten Fall angepasst ist, mit einer Funktion $F: (\mathbb{R}^{\geq 0})^U \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ identifiziert werden kann, die bezüglich Permutationen von Komponenten invariant ist. Dabei seien diejenigen Komponenten, denen keine Inversion entspricht, „0“ gesetzt. Da das Tupel $(0, \dots, 0) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ der Situation entspricht, dass keine Inversionen aufgetreten sind, wird gefordert, dass F die Gleichung

$$\mathbf{S1}: F(0, \dots, 0) = 0$$

erfüllt. Um darüber hinaus wachsender Länge von Inversionen unabhängig von der jeweiligen Komponente Rechnung zu tragen, wird weiter postuliert, dass für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$, alle Komponenten $1 \leq p < q \leq U$ und alle Tupel

$$(x_1, \dots, x_p, \dots, x_q, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$$

folgende Ungleichung und Gleichung gelten.

$$\begin{aligned} \mathbf{S2}: F(x_1, \dots, x_p, \dots, x_q, \dots, x_U) &< F(x_1, \dots, x_p + \varepsilon, \dots, x_q, \dots, x_U) \\ &= F(x_1, \dots, x_p, \dots, x_q + \varepsilon, \dots, x_U) \end{aligned}$$

Dann gilt folgender Satz:

Satz:

Es existiere eine streng monoton steigende Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, mit $T(0) = 0$, so dass für alle Tupel $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ die Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_U) = T\left(\sum_{i=1}^U x_i\right)$$

gilt (Beweis siehe Kapitel 10).

Sei $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ ein beliebiges Tupel und nimmt man an, dass die Komponente x_k die Länge $l((i,j),(s,t))$ der Inversion $((i,j),(s,t))$ kodiert. Dann kann zunächst nicht unterstellt werden, dass $x_k = l((i,j),(s,t))$ gilt. Man kann – im Gegenteil – lediglich

annehmen, dass eine Gewichtung $g_{((i,j),(s,t))} : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ (streng monoton steigende Funktion) mit

$$g_{((i,j),(s,t))}(0) = 0 \text{ und } g_{((i,j),(s,t))}(l((i,j),(s,t))) = x_k$$

existiert. Bis auf eine streng monoton steigende Transformation $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $T(0) = 0$ und mögliche Gewichtungen $g_{((i,j),(s,t))}(l((i,j),(s,t)))$ existieren daher genau zwei adäquate Stressmaße, die den Postulaten des zweiten Falls gerecht werden.

$$S_{\text{SMO}}^2(d, \partial) := \sum_{((i,j),(s,t)) \in I(d, \partial)} g_{((i,j),(s,t))}(l((i,j),(s,t)))$$

im Falle strenger Monotonie (vgl. **SMO**) und

$$S_{\text{MO}}^2(d, \partial) := \sum_{((i,j),(s,t)) \in I'(d, \partial)} g_{((i,j),(s,t))}(l((i,j),(s,t)))$$

im Falle bloßer Monotonie (vgl. **MO**).

Zur Ermittlung gewichtsunabhängiger Stressmaße seien die Tupel $(x_1, \dots, x_U), (y_1, \dots, y_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$, Komponenten x_k, y_k ($1 \leq k \leq U$), eine Permutation π auf $\{1, \dots, U\}$ und eine beliebige reelle Zahl $\varepsilon \geq 0$ gegeben. In einem zweiten Schritt werden die folgenden Bedingungen für eine Funktion $F : (\mathbb{R}^{\geq 0})^U \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ betrachtet.

$$\mathbf{S3}: F(x_1, \dots, x_U) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(U)})$$

(Permutationsunabhängigkeit)

$$\mathbf{S3}^+: F(x_1, \dots, x_k + \varepsilon, \dots, x_U) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)} + \varepsilon, \dots, x_{\pi(U)})$$

(strenge Permutationsunabhängigkeit)

$$\mathbf{S4}: \text{Aus } \varepsilon > 0 \text{ folgt } F(x_1, \dots, x_U) < F(x_1, \dots, x_k + \varepsilon, \dots, x_U)$$

(strenge Monotonie)

$$\mathbf{S5}: F(x_1, \dots, x_U) = F(y_1, \dots, y_U)$$

$$\Rightarrow F(x_1, \dots, x_k + \varepsilon, \dots, x_U) = F(y_1, \dots, y_k + \varepsilon, \dots, y_U).$$

(Abbildungseigenschaft der Erhöhung einzelner Komponenten)

Nun gilt folgender Satz:

Satz (Äquivalenzsatz):

Für eine Funktion $F : (\mathbb{R}^{\geq 0})^U \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (i) F erfüllt Bedingung **S2**
- (ii) F erfüllt die Bedingung **S3**⁺ und **S4**
- (iii) F erfüllt die Bedingung **S3**, **S4** und **S5**

Der Beweis dieses Satzes wird im Anhang ausgeführt (vgl. Kapitel 10). Vor diesem Hintergrund kann in voller Allgemeinheit angenommen werden, dass für jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq U$, die also einer Komponente entspricht, streng monoton steigende Gewichtsfunktionen $g_k : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $g_k(0)=0$ gegeben sind. Dann sei, um Bedingung **S5** gerecht zu werden, konsequenterweise für alle Tupel $(x_1, \dots, x_U), (y_1, \dots, y_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ und alle Gewichtsfunktionen g_1, \dots, g_U folgende Bedingung gefordert:

$$\mathbf{S6}: F(x_1, \dots, x_U) = F(y_1, \dots, y_U)$$

$$\Rightarrow F(g_1(x_1), \dots, g_U(x_U)) = F(g_1(y_1), \dots, g_U(y_U)).$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass eine Funktion $F: (\mathbb{R}^{\geq 0})^U \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ genau dann ein mit Gewichtsfunktionen $g_k: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ($1 \leq k \leq U$) verträgliches Stressmaß $S(d, \partial)$ repräsentiert, wenn sie die Bedingungen **S1**, **S3**, **S4**, **S5**, und **S6** oder die dazu äquivalenten Bedingungen **S1**, **S2** und **S6** erfüllt. Dann gilt folgender Satz:

Satz (Charakterisierungssatz):

Sei $F: (\mathbb{R}^{\geq 0})^U \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine Abbildung, die bezüglich der Gewichtsfunktion $g_1, \dots, g_U: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ die Bedingung **S1**, **S3**, **S4**, **S5** und **S6** oder **S1**, **S2** und **S6** erfüllt. Dann existiert eine streng monoton steigende Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $T(0)=0$, so dass für alle Tupel $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ die Gleichung $F(x_1, \dots, x_U) = T(\sum_{i=1}^U x_i)$ gilt (Beweis siehe Kapitel 10).

Daraus resultieren nun endgültig zwei bis auf streng monoton steigende Transformationen $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $T(0)=0$ eindeutig bestimmte adäquate Stressmaße, nämlich

$$S_{\text{SMO}}^3(d, \partial) := \sum_{((i,j),(s,t)) \in I(d, \partial)} |d_{ij} - d_{st}| + |\partial_{ij} - \partial_{st}|$$

im Falle strenger Monotonie (vgl. **SMO**) und

$$S_{\text{MO}}^3(d, \partial) := \sum_{((i,j),(s,t)) \in I'(d, \partial)} |d_{ij} - d_{st}| + |\partial_{ij} - \partial_{st}|$$

im Falle bloßer Monotonie (vgl. **MO**).

Zur Berechnung von $S_{\text{SMO}}^3(d, \partial)$ und $S_{\text{MO}}^3(d, \partial)$ seien die Werte von ∂ nach aufsteigendem Rang geordnet. Es gelte also $\partial_1 \leq \partial_2 \leq \dots \leq \partial_K$. Dies bedeutet, dass d so umgeordnet werden muss, dass dem Wert (Rang) d_k der Wert (Rang) ∂_k entspricht. Für jeden Index $k \in \{1, \dots, K\}$ wird daher $L_k(d, \partial) :=$

$$\begin{aligned} & \sum_{t > k, d_t < d_k} |d_k - d_t| + |\partial_k - \partial_t| + \sum_{t > k, d_t = d_k, \partial_k < \partial_t} |d_k - d_t| + |\partial_k - \partial_t| \\ & + \sum_{t > k, d_k < d_t, \partial_k = \partial_t} |d_k - d_t| + |\partial_k - \partial_t| \end{aligned}$$

und

$$L'_k(d, \partial) := \sum_{t > k, d_t < d_k, \partial_k < \partial_t} |d_k - d_t| + |\partial_k - \partial_t| + \sum_{t > k, d_t = d_k, \partial_k < \partial_t} |d_k - d_t| + |\partial_k - \partial_t|.$$

gesetzt. Dann gilt:

$$S_{\text{SMO}}^3(d, \partial) := \sum_{k=1}^{K-1} L_k(d, \partial)$$

im Falle strenger Monotonie (vgl. **SMO**) und

$$S_{\text{MO}}^3(d, \partial) := \sum_{k=1}^{K-1} L'_k(d, \partial)$$

im Falle bloßer Monotonie (vgl. **MO**).

Zur Normierung von $S_{\text{SMO}}^3(d, \partial)$ und $S_{\text{MO}}^3(d, \partial)$ werden diejenigen Distanzen ∂' berechnet, die d bezüglich $S_{\text{SMO}}^3(d, \partial)$ bzw. $S_{\text{MO}}^3(d, \partial)$ am schlechtesten approximieren. Dazu denkt man sich d nach aufsteigendem Rang $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_K$ geordnet. Dann setzt man $s_k := k$ genau dann, wenn k der Index von d_k ist. Das Distanzmaß ∂' definiert durch $\partial'_k := K + 1 - s_k$ approximiert dann das gegebene Distanzmaß d sowohl bezüglich $S_{\text{SMO}}^3(d, \partial)$ als auch bezüglich

$S_{\text{MO}}^3(d, \partial)$ am schlechtesten (vgl. [71]). Die Definition von ∂' impliziert die Gleichungen $S_{\text{SMO}}^3(d, \partial') = S_{\text{MO}}^3(d, \partial) =: N$.

Man errechnet

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{t=k+1}^K (d_t - d_k) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{K-1} (K+1-k) \cdot (K-k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{t=k+1}^K (d_t - d_k) + \frac{(K+1) \cdot K \cdot (K-1)}{6}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man so die normierten adäquaten Stressmaße

$$S_{\text{SMO}}^4(d, \partial) := \frac{1}{N} S_{\text{SMO}}^3(d, \partial)$$

(im Falle strenger Monotonie (vgl. **SMO**)) und

$$S_{\text{MO}}^4(d, \partial) := \frac{1}{N} S_{\text{MO}}^3(d, \partial)$$

(im Falle bloßer Monotonie (vgl. **MO**)), die u.a. zum Vergleich mit Kruskals Stressmaßen und zur Auswahl geeigneter Konfigurationen herangezogen werden sollen.

Neben Stressmaßen gibt es auch weitere Vorschläge, die Verletzung der Monotoniebedingung zu veranschaulichen. Eine dieser Möglichkeiten sind sogenannte Shepard-Diagramme. Die jeweiligen Distanzmatrizen (d_{ij}) und (δ_{ij}) werden dazu durch Vektoren (d_k) und (δ_k) repräsentiert. Das kann erreicht werden, indem man beide Matrizen in gleicher Weise durchläuft und die Komponenten jeweils paarweise in entsprechende Vektoren schreibt. In einem nächsten Schritt werden die Komponenten der Vektoren in Ränge umgewandelt. Im Rahmen von symmetrischen Ähnlichkeits- oder Unähnlichkeitsmatrizen haben die so entstandenen Vektoren eine Dimension von $K = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$, wobei n die Anzahl der Spalten bzw. Zeilen der entsprechenden Distanzmatrix ist. Nun werden die Vektoren so geordnet, dass $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_K$ gilt. Durch die paarweise geordnete Zusammenfassung der Komponenten entstehen so K Paare von Punkten X_k , die im \mathbb{R}^2 angetragen werden können. Jeweils benachbarte Punkt X_k und X_{k+1} werden durch eine Strecke verbunden (vergleiche zu diesen Ausführungen auch [13], S. 515ff). Die Verletzung der strengen Monotoniebedingung wird in diesem Diagramm durch fallende Abschnitte gekennzeichnet. Ist die strenge Monotoniebedingung nicht verletzt, steigt der Graph monoton. Im Falle bloßer Monotonie muss ein Shepard-Diagramm entsprechend anders gedeutet werden.

6.5.5 Einige untersuchungsspezifische Aspekte der Auswertung

Die vorhergehenden Ausführungen waren nur schwach an mögliche Konsequenzen von Ausprägungen der jeweiligen Maße, also inhaltliche Aspekte, angelehnt. Was es bedeutet, wenn verschiedene Probanden in einer Gruppe zusammengefasst werden, hängt nicht zuletzt von der analysierten Matrix ab. Die Analyse der Matrix \mathcal{K} mit den Mitteln der Clusteranalyse liefert in Gruppen jeweils Probanden, die zum einen ähnlich lange Bearbeitungswege hatten und zum anderen auf diesen ähnliche Fehler gemacht, Aufgaben also ähnlich oft richtig gelöst haben oder ähnlich oft Hilfen in Anspruch nahmen. Die Analyse von \mathcal{D} liefert im Gegensatz dazu Gruppierungen, die bei gleichen Aufgaben ähnliche Verhaltensweisen zeigten. Jede Verhaltensabweichung bei Aufgaben führt zur Erhöhung der Distanz. Vergleicht man diese beiden Interpretationen, so ergeben sich Folgerungen für Cluster mit Partitionen, die in beiden Dendrogrammen jeweils auftreten. Gibt es Cluster, die bei jedem der beiden Maße auftauchen, so müssen die Probanden in den entsprechenden Gruppen sowohl ähnlich häufig Verhaltensweisen zeigen, als auch bei gleichen Aufgaben ähnliches Verhalten zeigen. Die

Bearbeitungswege stimmen also in mehreren Charakterzügen überein. Inwieweit dies durch die Daten bestätigt wird, zeigt das folgende Kapitel. Im Rahmen der MDS können die in den Clusteranalysen gewählten Gruppen zum einen wiedergefunden werden, zum anderen gibt es aufgrund der Diagramme Indizien zur Interpretation einzelner Cluster. Dies geschieht durch Rückgriff auf die jeweiligen Protokolle.

Verfassung der verwandten Software

7 Verfassung der verwandten Software

7.1 Schematisierung der Lektion zur Addition

Im Programm Bruchrechnen sind die Programmteile zur Addition in zwei Typen kategorisierbar:

- Einführung / Erklärung
- Interaktive Übungen

Folgendes Diagramm gibt den Aufbau der Additionslektion wieder. Mit E sind Einführungen mit Ü jeweils Übungen gekennzeichnet. Am linken Rand des Diagramms wurden bereits Zustandszuweisungen vorgenommen.

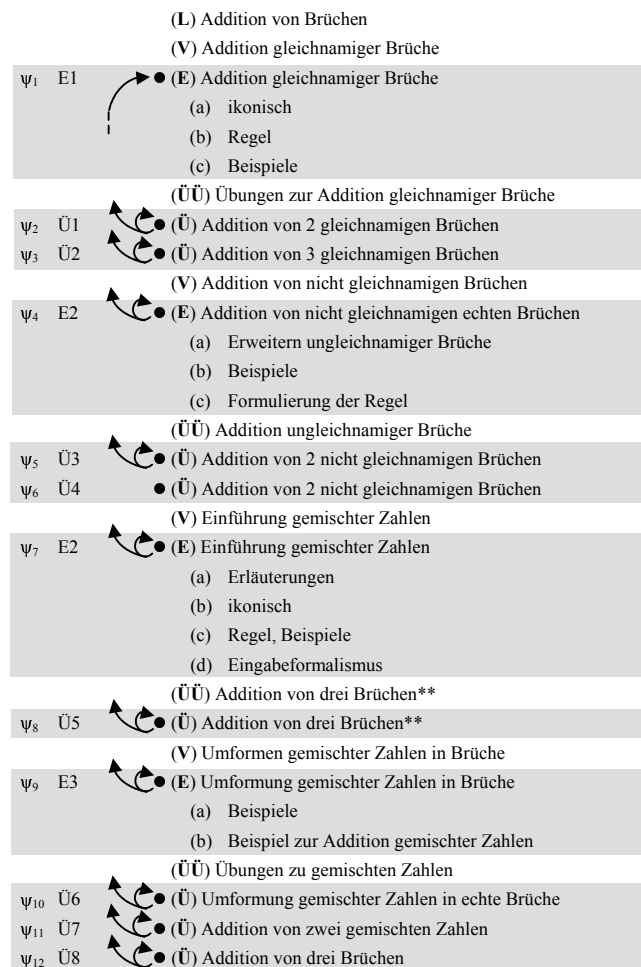


Abbildung 26, Struktur der Lektion zur Addition

Ausführliche Beschreibungen des Programms finden sich sowohl in [130] als auch in [67]. Es wird aus diesem Grund darauf verzichtet, alle Teilschritte detailliert mit Screenshots zu erläutern. Lediglich einige erläuternde Bilder sollen die Einbettung des Programms in das zuvor vorgestellte Modell begleiten.

Wie bereits erwähnt wurde, gibt es zwei grundsätzlich unterschiedliche Typen von Programmteilen, die sequentiell angeordnet sind. Eingeleitet werden Themenkomplexe meist durch einführende Erläuterungen und Beispiele, in welchen nicht nur formal sondern auch anschaulich argumentiert wird.

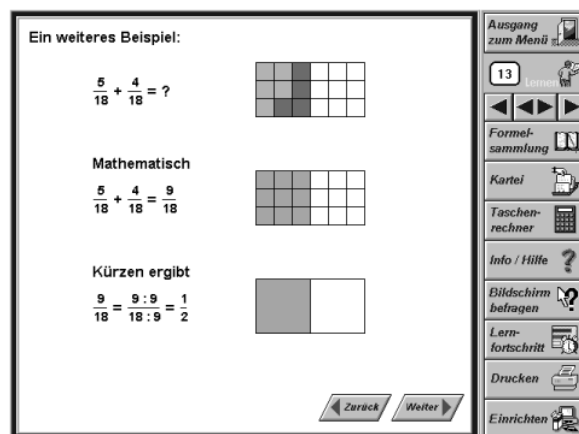


Abbildung 27, Einführung in die Addition

Gefolgt werden diese Programmteile von Übungen. Bedienung, Ablauf und Bildschirmaufbau bleiben bei den Übungen im Wesentlichen erhalten. So bekommt der Schüler stets eine Aufgabe, die in beliebiger Zeit mit den vom Programm zur Verfügung gestellten Hilfen gelöst werden sollte.

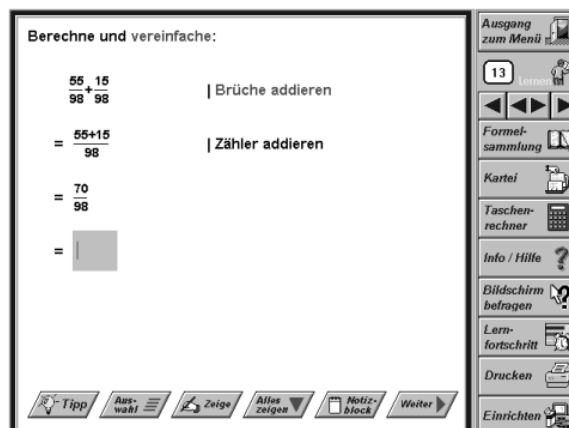


Abbildung 28, Aufgabe zur Addition

Diese Hilfsmittel sind im einzelnen der Taschenrechner zum Rechnen mit Zahlen, diverse erläuternde Hilfeseiten und auch die Optionen Zeigen, Auswahl, Tipp oder Notizblock. Die Hilfen können aktiv in Anspruch genommen werden, das heißt, dass der Schüler nicht erst

einen Fehler bei der Bearbeitung gemacht haben muss, um auf sie zuzugreifen. Tätigt der Schüler eine Fehleingabe, so versucht das Programm durch entsprechende Kommentare Hilfestellungen zu geben. Dies gelingt nicht immer in angemessener Weise (vgl. [67]).

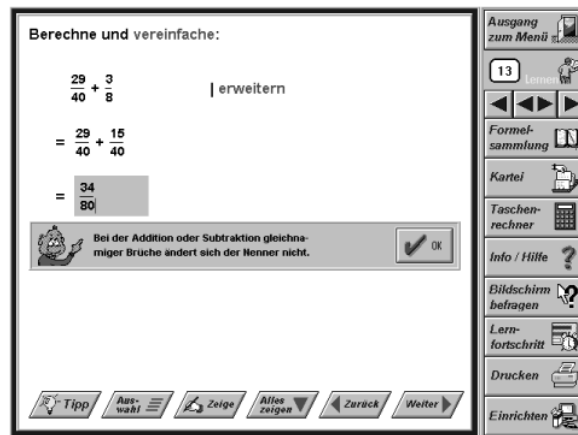


Abbildung 29, Fehlerrückmeldung

Die Nutzung von Hilfen und die Eingabe fehlerhafter Lösungen oder Lösungsschritte, bestimmen das Fortkommen im Programm wesentlich. Nur durch die Vermeidung von Hilfen und Fehlern ist ein erfolgreicher Abschluss möglich. Der Schüler hat zusätzlich die Möglichkeit, im Programm zu navigieren und so bewusst Übungen des Programms zu verlassen oder anzusteuern. Nach der Bearbeitung einer Übung gibt das Programm jeweils eine Lernwegempfehlung.

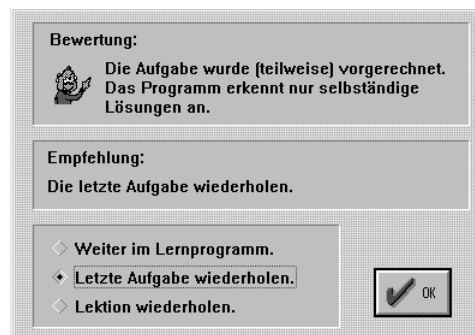


Abbildung 30, Lernwegempfehlung

Die Empfehlung des Programms kann der Schüler entweder miss- oder beachten. Ändert er Lernwegempfehlungen, besteht jedoch die Gefahr, dass er die Lektion nicht mehr vollständig abarbeiten kann. Sie erscheint dann in der Übersicht als nur teilweise bearbeitet. Verhalten und Fähigkeit des Schülers entscheiden also über das Fortkommen im Programm. Die Eingabe in das System erfolgt über den integrierten Formeleditor. Zahlen werden dabei wie üblich, der Bruchstrich mit „/“ und andere Rechenzeichen wie gewohnt eingegeben. Zum Teil ist es zur Eingabe von Termen notwendig, mit den Cursortasten spezielle Positionen anzuspringen. Besteht eine Aufgabe aus mehreren Termen die addiert oder umgewandelt werden müssen,

lenkt das Programm die Eingabe des Schülers. Terme werden dabei jeweils schrittweise eingegeben.

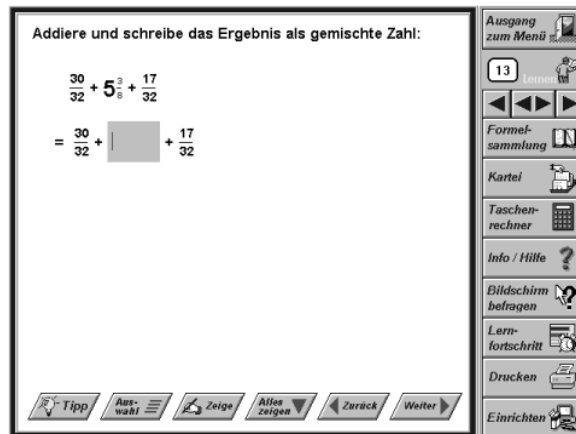


Abbildung 31, komplexe Aufgabe

Die Eingabekonventionen werden, ähnlich wie fachliche Erläuterungen, jeweils vor den relevanten Übungen eingeführt.

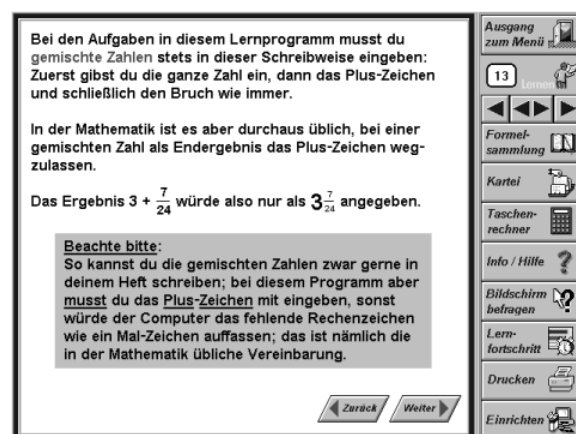


Abbildung 32, Eingabekonvention

Um einen zusätzlichen Einblick in Struktur und Aufbau der Übungen zu ermöglichen, werden in der folgenden Tabelle zu jeder Übung einige Beispielaufgaben angegeben. Anspruch auf Vollständigkeit wird nicht erhoben, da der Quellcode des Programms ohnehin unbekannt ist und Aussagen über die Gesamtheit der Aufgaben, bzw. über eine Systematik bei deren Generierung in den Bereich der Spekulation fallen würden. Die Aufgaben wurden unmittelbar nacheinander dem Programm entnommen. Es handelt sich also nicht um meine Auswahl, sondern um eine vom Programm ausgewählte Folge von Aufgaben, wie sie auch Probanden erhalten könnten (vgl. folgende Tabelle).

Prgteil	Aufgabenstellungen und Aufgaben
1. Übung	Berechne und vereinfache: $\frac{83}{168} + \frac{43}{168}; \frac{35}{120} + \frac{49}{120}; \frac{51}{117} + \frac{53}{117}; \frac{89}{135} + \frac{31}{135}$
2. Übung	Berechne den Ausdruck und vereinfache falls möglich: $\frac{17}{80} + \frac{6}{80} + \frac{49}{80}; \frac{28}{72} + \frac{7}{72} + \frac{46}{72}; \frac{33}{64} + \frac{30}{64} + \frac{9}{64}; \frac{36}{77} + \frac{12}{77} + \frac{43}{77}$
3. Übung	Berechne und vereinfache falls möglich: $\frac{25}{36} + \frac{8}{9}; \frac{16}{21} + \frac{4}{7}; \frac{25}{36} + \frac{5}{9}; \frac{23}{24} + \frac{3}{8}; \frac{7}{30} + \frac{1}{6}; \frac{17}{18} + \frac{5}{6}; \frac{19}{21} + \frac{3}{7}$
4. Übung	Berechne und vereinfache: $\frac{11}{14} + \frac{3}{10}; \frac{5}{14} + \frac{1}{7}; \frac{13}{14} + \frac{1}{10}; \frac{1}{12} + \frac{1}{4}; \frac{3}{10} + \frac{5}{6}; \frac{1}{15} + \frac{1}{12}; \frac{5}{6} + \frac{7}{10}$
5. Übung	Berechne und schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{7}{12}; \frac{5}{6} + \frac{8}{5} + \frac{7}{30}; \frac{5}{8} + \frac{8}{5} + \frac{77}{80}; \frac{7}{8} + \frac{6}{5} + \frac{33}{40}; \frac{5}{6} + \frac{12}{7} + \frac{31}{84}$
6. Übung	Wandle die gemischte Zahlen in unechte Brüche um: $[5\frac{2}{3} = ?; 1\frac{1}{2} = ?; 2\frac{4}{19} = ?]; [5\frac{3}{13} = ?; 4\frac{1}{6} = ?; 4\frac{5}{11} = ?]; [1\frac{7}{8} = ?; 1\frac{9}{10} = ?; 3\frac{10}{19} = ?]$
7. Übung	Berechne den Ausdruck und vereinfache falls möglich: $4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{9}; 3\frac{4}{5} + 3\frac{1}{15}; 4\frac{4}{5} + 2\frac{13}{20}; 4\frac{4}{7} + 3\frac{1}{21}; 3\frac{1}{9} + 3\frac{14}{27}; 4\frac{3}{4} + 2\frac{3}{8}$
8. Übung	Addiere und schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl: $\frac{8}{25} + 5\frac{1}{5} + \frac{8}{25}; \frac{11}{20} + 3\frac{1}{5} + \frac{8}{20}; \frac{9}{15} + 1\frac{1}{3} + \frac{3}{15}; \frac{1}{8} + 2\frac{1}{2} + \frac{6}{8}; \frac{8}{20} + 5\frac{3}{4} + \frac{16}{20}$

Tabelle 3, Beispielaufgaben aus den Übungen

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die didaktische Konzeption der Aufgaben nicht näher hinterfragt wird, da sie vom Programm bzw. dessen Autoren vorgegeben wurde. Die Übungen mit den Erläuterungen bilden im Sinne von Definition 6.1.7 einen Satz von Zuständen. Es wurde, gemäß des Diagramms zu Beginn dieses Kapitels, eine Unterteilung in 12 Zustände vorgenommen. Um das Verhalten vollständig beschreiben zu können, wird mit Hilfe von Satz 6.1.10 ein vollständiger Satz von Zuständen erzeugt:

Es ist $S_n = \{\psi_1, \dots, \psi_{12}\}$, dann ist V_m wie folgt bestimmt:

$$V_m = V_{n+1} = S_n \cup \{\{\psi\} \setminus S_n\}$$

mit $\psi = \mathbf{P}$. Der neue Zustand wird mit ψ_{13} symbolisiert und ergibt sich zu $\psi_{13} = \{\psi\} \setminus S_n$. Der vollständige Satz von Zuständen zur Beschreibung des Programms ist somit V_m mit $V_m = \{\psi_1, \dots, \psi_{13}\}$.

7.2 Definition von Regeltypen, Formulierung der Regeln

Betrachtet man nochmals die Möglichkeiten eines Probanden innerhalb des Programms Lektionen abzuarbeiten, so zeichnet sich das Fortkommen im Wesentlichen durch vier Aspekte aus:

1. Die Möglichkeit, innerhalb einer Aufgabe Fehler zu machen
2. Die Möglichkeit, das Programm nicht bedienen zu können, also durch Bedienungsfehler nicht im Programm fortschreiten zu können.
3. Die Möglichkeit, in andere Programmteile zu navigieren.
4. Die Möglichkeit, nach jeder Übung Lernwegempfehlungen zu ändern.

Der vierte Aspekt kann dabei jeweils in Beziehung zu den anderen gesetzt werden. Um nicht bereits vorab zu stark zu pauschalisieren und etwaige Interpretationsmöglichkeiten in einem frühen Stadium auszuschließen, wurden sowohl mögliche Fehler des Probanden als auch freie Navigationsmöglichkeiten nochmals partitioniert. Folgende Regeltypen- und Regeltypengruppendefinitionen wurden gewählt:

Regeltyp	Inhalt der Regel
R	Springt nach richtig gelöster Aufgabe bzw. regulärem Vorgehen in neuen Zustand.
N	Ändert Empfehlung des Programms und hat vorher in \mathbb{N} falsch gerechnet oder eine falsche Zahl eingegeben.
K	Ändert Empfehlung des Programms und hat vorher falsch oder nicht gekürzt.
B	Ändert Empfehlung des Programms und hat einen Bedienungsfehler gemacht.
A	Ändert Empfehlung des Programms und hat vorher typischen Additionsfehler gemacht.
M	Ändert Empfehlung des Programms nicht und hat vorher in \mathbb{N} falsch gerechnet oder eine falsche Zahl eingegeben.
L	Ändert Empfehlung des Programms nicht und hat vorher falsch oder nicht gekürzt.
D	Ändert Empfehlung des Programms nicht und hat einen Bedienungsfehler gemacht.
C	Ändert Empfehlung des Programms nicht und hat vorher typischen Additionsfehler gemacht.
Z	Springt mit der Zurück-Taste in neuen Zustand.
E	Sprung nach Abbruch der Übung in neuen Zustand ohne Empfehlung zu ändern.
F	Sprung nach Abbruch der Übung in neuen Zustand und Empfehlung wurde geändert.
U	Sprung durch Menüauswahl.
I	Ändert Empfehlung des Programms und hat vorher Hilfe des Programms in Anspruch genommen.
H	Ändert Empfehlung des Programms nicht und hat vorher Hilfe des Programms in Anspruch genommen.

Tabelle 4, Ausführliche Regeltypentabelle

Die Regeltypen werden wie folgt gruppiert:

- G_1 : **R**
 G_2 : **N, K, A, M, L, C**
 G_3 : **B, Z, E, F, U, D**
 G_4 : **H, I**

Man erhält somit vier programmorientierte Verhaltensweisen, die inhaltlich gedeutet werden können:

- G_1 : Reguläres Fortkommen, Aufgabe wurde im Sinn des Programms gelöst.
- G_2 : Rechenfehler oder ähnliches. Falscheingaben aufgrund mathematischer Defizite.
- G_3 : Durch bewusste oder unbewusstes Fehlverhalten eingeschränktes Fortkommen.
- G_4 : Durch Inanspruchnahme von Hilfen eingeschränktes Fortkommen.

Aufgrund der verfeinerten Regeltypenwahl können nun jeweils Regelsätze bestimmt werden. Die Zusammenfassung aller vollständigen Regelsätze ergibt die Verfassung. Die Verfassung des Programms Bruchrechnen kann der Tabelle auf der nächsten Seite entnommen werden. Sie ist so zu lesen, dass die jeweiligen Regeltypen durch bestimmte Stellen in einer 5x3 Inzidenzmatrix repräsentiert werden. Die Belegung der einzelnen Komponenten dieser Matrix ist im oberen Bereich der Tabelle zu finden. Hier ist folgende Teilmatrix abgebildet, welche die inhaltliche Bedeutung der einzelnen Komponenten der Gesamtmatrix festlegt:

R	M	E
N	L	F
K	D	U
B	C	I
A	Z	H

Abbildung 33, Regelanordnung

Ein „X“ in der Matrix bedeutet jeweils, dass die entsprechende Regel existiert. Nun verbinden Regeln jeweils zwei Zustände. In der ersten Spalte, bzw. Zeile, werden jeweils die Zustände durch Zahlen symbolisiert. Der Zustand **von** dem die Regel in einen neuen Zustand überführt befinden sich in der ersten Spalte. Entsprechend finden sich der Zustand **in** den die Regel führt, in der ersten Zeile. Um die einzelnen Regeltypengruppen nochmals hervorzuheben, wurden diese jeweils in Graustufen unterlegt. Es ergaben sich so 453 Regeln, wobei viele der Regeln den Umstand beschreiben, dass der Proband nach einem Fehler in den Zustand ψ_{13} springt. Näheres ist der Tabelle zu entnehmen.

Auswertung

8 Auswertung, Situationen der Untersuchung

8.1 Vergleich von Bearbeitungswegen mit Hilfe multivariater Verfahren

Vorbemerkung: Die Einträge einiger Matrizen wurden zu Gunsten der Übersichtlichkeit gerundet. **Gerechnet wurde jedoch mit größeren Genauigkeiten!**

Methoden zum Vergleich der Bearbeitungswege wurden bereits in Kapitel 6 beschrieben. Im Folgenden werden vorab die beiden Matrizen \mathcal{K} und \mathcal{D} abgebildet. Um zu kennzeichnen, wann reduzierte Regeltypen zugrunde liegen, werden die entsprechenden Bezeichnungen für die Matrizen in diesen Fällen mit einem r indiziert. Für \mathcal{D}_r ergab sich nachstehende Matrix unter Berücksichtigung der in Kapitel 7 beschriebenen Gruppierungen von Regeltypen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	25	19	16	18	30	28	22	17	22	20	25	27	19	33
2	25	0	27	19	24	28	22	23	18	22	21	22	26	15	28
3	19	27	0	16	21	28	30	24	19	25	22	28	26	21	32
4	16	19	16	0	9	24	24	12	5	15	12	16	17	7	32
5	18	24	21	9	0	23	29	17	12	18	15	19	19	14	37
6	30	28	28	24	23	0	31	24	21	26	19	18	23	21	33
7	28	22	30	24	29	31	0	23	21	21	22	26	28	20	24
8	22	23	24	12	17	24	23	0	11	17	14	16	21	11	33
9	17	18	19	5	12	21	21	11	0	16	13	15	14	6	29
10	22	22	25	15	18	26	21	17	16	0	17	18	21	14	31
11	20	21	22	12	15	19	22	14	13	17	0	13	23	13	35
12	25	22	28	16	19	18	26	16	15	18	13	0	23	11	33
13	27	26	26	17	19	23	28	21	14	21	23	23	0	13	36
14	19	15	21	7	14	21	20	11	6	14	13	11	13	0	27
15	33	28	32	32	37	33	24	33	29	31	35	33	36	27	0

0< d < 16
 15< d < 31
 30< d

Tabelle 5, Distanzmatrix gruppierte Regeltypen

Für \mathcal{D} ergab sich zum Vergleich:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	27	20	16	19	30	30	22	17	23	22	28	27	21	36
2	27	0	27	19	26	29	25	23	18	24	21	27	28	20	31
3	20	27	0	16	23	30	30	24	19	25	22	30	27	21	32
4	16	19	16	0	9	24	24	12	5	15	12	18	17	7	32
5	19	26	23	9	0	27	31	17	12	18	17	23	20	14	39
6	30	29	30	24	27	0	36	28	21	27	22	20	27	23	36
7	30	25	30	24	31	36	0	26	23	23	28	32	31	23	26
8	22	23	24	12	17	28	26	0	11	21	16	20	21	13	34
9	17	18	19	5	12	21	23	11	0	16	13	15	14	6	31
10	23	24	25	15	18	27	23	21	16	0	17	21	24	16	33
11	22	21	22	12	17	22	28	16	13	17	0	16	23	15	36
12	28	27	30	18	23	20	32	20	15	21	16	0	27	15	36
13	27	28	27	17	20	27	31	21	14	24	23	27	0	18	37
14	21	20	21	7	14	23	23	13	6	16	15	15	18	0	29
15	36	31	32	32	39	36	26	34	31	33	36	36	37	29	0

Tabelle 6, Distanzmatrix gemäß Regeltypen Tabelle 4

Wie aufgrund der Definition der Distanz $\mathbf{D}(\mathbf{K}_e, \mathbf{K}_f)$ zweier Bearbeitungswege zu erwarten war, liefert der gruppierte Regeltypensatz kleinere Distanzen. Die Abweichungen sind jedoch verhältnismäßig gering. So beträgt die maximale absolute Abweichung bezüglich der in \mathcal{D}_r bzw. \mathcal{D} aufgeführten Distanzen 6, die maximale relative Abweichung bezüglich \mathcal{D} daher 28%. Der Mittelwert der absoluten Abweichung wird durch den Term:

$$\frac{1}{105} \sum_{e=2}^{15} \sum_{f=1}^{e-1} |\mathbf{D}(\mathbf{K}_e; \mathbf{K}_f) - \mathbf{D}_r(\mathbf{K}_e; \mathbf{K}_f)|$$

berechnet und beträgt ungefähr 3,1. Dies weist auf innerhalb der gruppierten Regeltypen und Regeln dominierende Regeln hin und ist ein Indiz für die Existenz von Aufgaben, bei welchen Schüler gleiche Aktionen durchführten, bzw. ähnliche Probleme hatten. Ich stelle die entsprechende Diskussion zu Gunsten der Vorstellung weiterer Elemente der Datenzusammenstellung zurück. Die Zusammenfassung der Regeltypen zu Regeltypengruppen war rein inhaltlich motiviert. So wurde aufgrund einer Typisierungsangabe eine feinere Unterteilung vorgenommen, um bei der Kodierung der Videoprotokolle nicht von vornherein unnötig stark zu reduzieren. So bleibt es möglich, den Zustandsmatrizen nähere Informationen zu entnehmen. Da nun jedoch die Kodierung mit 15 Regeltypen vorgenommen wurde, soll auch die Möglichkeit berücksichtigt werden, dass es auch andere Kriterien zur Gruppierung der Regeltypen gibt, welche im Fall der vorliegenden Untersuchung geeigneter erscheinen. Eine Abwägung dieser Möglichkeiten bedürfte notwendig einer Gewichtung, welche wiederum willkürlich wäre, bzw. weiterer Interpretationen notwendig machen würde. Da im Sinne der Philosophie dieser Arbeit jedoch vor möglichen Interpretationen eine durch Reduktion geprägte Selektion stattfinden soll, wird an dieser Stelle lediglich ein Vergleich der beiden Matrizen \mathcal{D}_r und \mathcal{D} mit Hilfe eines Shepard-Diagramms durchgeführt. Hierzu werden die jeweiligen Distanzmatrizen in Rangmatrizen umgewandelt und in der in Absatz 6.5.4 beschriebenen Weise in einem Diagramm festgehalten:

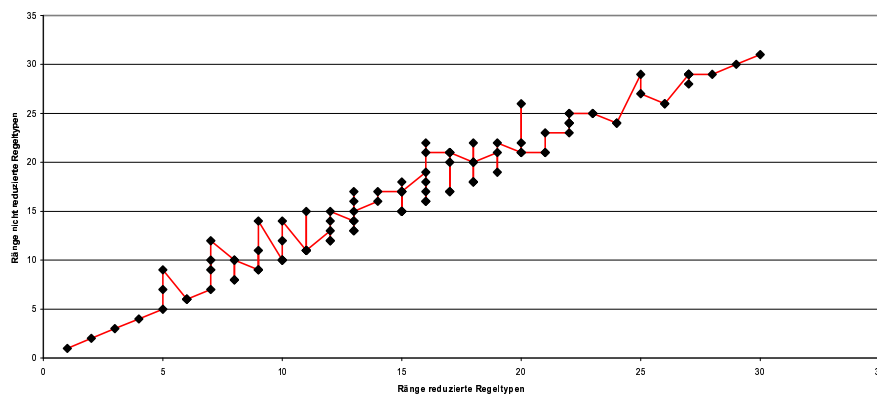


Abbildung 35, Shepard-Diagramm gruppierte Regeltypen gegen Regeltypen

Dies bedeutet, dass die Rangstruktur der Matrizen nahezu unabhängig von der vorgenommenen Gruppierung ist. Da im Rahmen der Auswertung der ordinale Charakter der Daten stets Berücksichtigung findet, ist die Gruppierung nicht nur inhaltlich, sondern auch aus dieser datenanalytischen Sicht vertretbar. Im Rahmen der Berechnung von Distanzen werden Bearbeitungswege dahingehend verglichen, inwieweit Probandenverhalten zustandsbezogen beobachtbar ist. In diesem Sinn impliziert die Distanz von Bearbeitungswegen, dass durch

Gruppierung vergleichbare Verhaltensweisen bei identischen Aufgaben auftauchen. Zunächst werden jedoch die Daten zur Korrelation von Bearbeitungswegen mit entsprechender Matrix \mathcal{K}_r betrachtet:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,00	-0,28	0,26	-0,04	0,37	-0,55	-0,24	0,07	-0,58	-0,11	-0,15	-0,11	-0,24	-0,33	-0,39
2	-0,28	1,00	-0,21	-0,10	-0,14	-0,27	0,52	0,17	0,00	0,32	0,29	0,26	-0,24	0,11	0,16
3	0,26	-0,21	1,00	-0,42	0,77	-0,43	-0,12	-0,17	-0,51	-0,02	0,08	0,36	0,26	-0,26	0,12
4	-0,04	-0,10	-0,42	1,00	-0,38	-0,84	-0,15	0,00	-0,13	-0,17	-0,29	-0,36	-0,60	-0,35	-0,31
5	0,37	-0,14	0,77	-0,38	1,00	-0,38	-0,07	-0,17	-0,53	-0,03	0,09	0,36	0,32	-0,28	-0,05
6	-0,55	-0,27	-0,43	-0,84	-0,38	1,00	-0,47	-0,56	-0,80	-0,31	-0,41	-0,11	-0,14	-0,69	-0,50
7	-0,24	0,52	-0,12	-0,15	-0,07	-0,47	1,00	0,21	-0,21	0,48	0,35	0,17	-0,24	-0,16	0,24
8	0,07	0,17	-0,17	0,00	-0,17	-0,56	0,21	1,00	-0,25	0,17	0,32	-0,06	0,01	0,08	-0,28
9	-0,58	0,00	-0,51	-0,13	-0,53	-0,80	-0,21	-0,25	1,00	-0,41	-0,44	-0,53	-0,70	0,33	-0,24
10	-0,11	0,32	-0,02	-0,17	-0,03	-0,31	0,48	0,17	-0,41	1,00	0,47	0,35	-0,16	-0,33	0,26
11	-0,15	0,29	0,08	-0,29	0,09	-0,41	0,35	0,32	-0,44	0,47	1,00	0,41	0,21	-0,19	0,08
12	-0,11	0,26	0,36	-0,36	0,36	-0,11	0,17	-0,06	-0,53	0,35	0,41	1,00	0,24	-0,38	0,10
13	-0,24	-0,24	0,26	-0,60	0,32	-0,14	-0,24	0,01	-0,70	-0,16	0,21	0,24	1,00	-0,36	-0,12
14	-0,33	0,11	-0,26	-0,35	-0,28	-0,69	-0,16	0,08	0,33	-0,33	-0,19	-0,38	-0,36	1,00	-0,20
15	-0,39	0,16	0,12	-0,31	-0,05	-0,50	0,24	-0,28	-0,24	0,26	0,08	0,10	-0,12	-0,20	1,00

	k<-0,5
	-0,5<k<0,5
	0,5<k

Tabelle 7, Korrelationen gruppierte Regeltypen

Die Matrix errechnet sich, wie bereits erwähnt, aus den jeweils reduzierten Häufigkeiten der Regeltypenvorkommen in den einzelnen Bearbeitungswegen. Folgende aus den Zustandsmatrizen ermittelte Tabelle war Grundlage zur Berechnung der Korrelationsmatrix:

Regeltypengruppen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R	18	12	21	15	20	102	13	10	12	23	26	22	44	12	23
NKAMLC	12	2	5	1	6	7	3	3	2	3	3	5	6	2	2
BZEFUD	2	4	8	2	6	75	4	2	0	3	4	5	7	0	9
HI	1	9	1	0	1	9	20	3	0	13	4	7	3	2	25

Tabelle 8, Häufigkeiten gruppierte Regeltypen

Zum Vergleich sei auch hier entsprechende Tabelle ohne Regeltypengruppierung und die Matrix \mathcal{K} angeführt:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1,00	-0,56	-0,40	-0,44	-0,14	-0,74	-0,63	-0,49	-0,64	-0,40	-0,44	-0,58	-0,52	-0,55	-0,63
2	-0,56	1,00	-0,55	-0,64	-0,76	-0,52	-0,12	-0,04	-0,63	-0,51	-0,07	0,04	-0,55	-0,70	-0,71
3	-0,40	-0,55	1,00	-0,69	-0,31	-0,58	-0,50	-0,64	-0,76	-0,49	-0,22	-0,51	-0,36	-0,65	-0,36
4	-0,44	-0,64	-0,69	1,00	-0,33	-0,92	-0,86	-0,38	-0,68	-0,34	-0,23	-0,55	-0,48	-0,49	-0,47
5	-0,14	-0,76	-0,31	-0,33	1,00	-0,80	-0,88	-0,73	-0,80	-0,66	-0,45	-0,75	-0,61	-0,50	-0,67
6	-0,74	-0,52	-0,58	-0,92	-0,80	1,00	-0,42	-0,65	-0,72	-0,28	-0,56	-0,24	-0,37	-0,78	-0,59
7	-0,63	-0,12	-0,50	-0,86	-0,88	-0,42	1,00	-0,44	-0,68	-0,45	-0,71	-0,12	-0,26	-0,80	-0,26
8	-0,49	-0,04	-0,64	-0,38	-0,73	-0,65	-0,44	1,00	-0,56	-0,31	-0,17	-0,31	-0,68	-0,58	-0,81
9	-0,64	-0,63	-0,76	-0,68	-0,80	-0,72	-0,68	-0,56	1,00	-0,57	-0,76	-0,72	-0,83	-0,67	-0,90
10	-0,40	-0,51	-0,49	-0,34	-0,66	-0,28	-0,45	-0,31	-0,57	1,00	-0,08	0,08	-0,12	-0,35	-0,41
11	-0,44	-0,07	-0,22	-0,23	-0,45	-0,56	-0,71	-0,17	-0,76	-0,08	1,00	-0,11	-0,23	-0,49	-0,37
12	-0,58	0,04	-0,51	-0,55	-0,75	-0,24	-0,12	-0,31	-0,72	0,08	-0,11	1,00	0,00	-0,55	-0,28
13	-0,52	-0,55	-0,36	-0,48	-0,61	-0,37	-0,26	-0,68	-0,83	-0,12	-0,23	0,00	1,00	-0,54	-0,19
14	-0,55	-0,70	-0,65	-0,49	-0,50	-0,78	-0,80	-0,58	-0,67	-0,35	-0,49	-0,55	-0,54	1,00	-0,66
15	-0,63	-0,71	-0,36	-0,47	-0,67	-0,59	-0,26	-0,81	-0,90	-0,41	-0,37	-0,28	-0,19	-0,66	1,00

Tabelle 9, Korrelationen ohne Regeltypengruppierung

Untenstehende Tabelle gibt die zugrunde gelegten Häufigkeiten wieder:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R	18	12	21	15	20	102	13	10	12	23	26	22	44	12	23
N	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
K	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
B	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M	5	1	1	0	0	2	1	1	2	2	1	2	3	0	0
L	7	0	3	1	6	4	0	2	0	1	2	1	1	1	1
D	1	1	0	1	4	0	0	1	0	1	1	1	2	0	0
C	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	0	2	2	0	0	72	0	0	0	0	2	2	0	0	3
E	0	0	2	1	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
F	1	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1
U	0	0	2	0	0	3	2	0	0	2	0	1	2	0	4
I	0	6	0	0	0	2	10	3	0	1	1	1	1	1	17
H	1	3	1	0	1	7	10	0	0	12	3	6	2	1	8

Tabelle 10, Häufigkeiten gemäß Regeltypen Tabelle 4

Auch die Korrelationsmatrizen spiegeln die Annahmen aus den vorigen Kapiteln wieder. So gibt es in der zweiten Korrelationsmatrix keine Korrelationen über 0,5. Die negativen Korrelationen nahe bei -1 häufen sich hingegen. Dies deutet auf von einigen Probanden bevorzugte Regeltypen hin, welche andere nicht oder eher selten verwandten und die durch Zusammenfassung der Regeltypen nicht mehr derart ins Gewicht fallen. Bei der Analyse der Daten mit Hilfe multivariater Methoden beschränke ich mich auf die Matrizen \mathcal{K}_r und \mathcal{D}_r . Untersucht wurden die Matrizen jeweils mit dem Complete-Linkage Verfahren der Clusteranalyse und nicht metrischer MDS. Die Matrix \mathcal{K}_r wurde dabei zur Matrix \mathcal{K}'_r , also zu einer Unähnlichkeitsmatrix, transformiert. Die Umrechnung ergab:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,00	0,64	0,37	0,52	0,32	0,78	0,62	0,47	0,79	0,56	0,58	0,56	0,62	0,67	0,70
2	0,64	0,00	0,60	0,55	0,57	0,64	0,24	0,42	0,50	0,34	0,36	0,37	0,62	0,44	0,42
3	0,37	0,60	0,00	0,71	0,12	0,72	0,56	0,59	0,76	0,51	0,46	0,32	0,37	0,63	0,44
4	0,52	0,55	0,71	0,00	0,69	0,92	0,58	0,50	0,57	0,59	0,65	0,68	0,80	0,68	0,66
5	0,32	0,57	0,12	0,69	0,00	0,69	0,53	0,58	0,77	0,51	0,45	0,32	0,34	0,64	0,52
6	0,78	0,64	0,72	0,92	0,69	0,00	0,74	0,78	0,90	0,65	0,70	0,56	0,57	0,84	0,75
7	0,62	0,24	0,56	0,58	0,53	0,74	0,00	0,40	0,60	0,26	0,33	0,41	0,62	0,58	0,38
8	0,47	0,42	0,59	0,50	0,58	0,78	0,40	0,00	0,63	0,42	0,34	0,53	0,50	0,46	0,64
9	0,79	0,50	0,76	0,57	0,77	0,90	0,60	0,63	0,00	0,70	0,72	0,76	0,85	0,33	0,62
10	0,56	0,34	0,51	0,59	0,51	0,65	0,26	0,42	0,70	0,00	0,26	0,33	0,58	0,66	0,37
11	0,58	0,36	0,46	0,65	0,45	0,70	0,33	0,34	0,72	0,26	0,00	0,30	0,40	0,59	0,46
12	0,56	0,37	0,32	0,68	0,32	0,56	0,41	0,53	0,76	0,33	0,30	0,00	0,38	0,69	0,45
13	0,62	0,62	0,37	0,80	0,34	0,57	0,62	0,50	0,85	0,58	0,40	0,38	0,00	0,68	0,56
14	0,67	0,44	0,63	0,68	0,64	0,84	0,58	0,46	0,33	0,66	0,59	0,69	0,68	0,00	0,60
15	0,70	0,42	0,44	0,66	0,52	0,75	0,38	0,64	0,62	0,37	0,46	0,45	0,56	0,60	0,00

Tabelle 11, Für Complete Linkage und MDS Transformierte Matrix

Ebenfalls notwendig für die weiteren Analysen ist die Matrix der Rangordnungen der Komponenten der unteren Dreiecksmatrix der transformierten Matrix. Sie wurde durch ein EXCEL-Makro berechnet:

0
72 0
16 63 0
40 44 89 0
6 52 1 83 0
97 71 90 104 84 0
65 2 48 53 43 92 0
35 25 58 37 57 98 22 0
99 37 94 50 96 103 62 69 0
46 14 38 59 39 76 3 26 87 0
54 15 33 75 31 88 9 13 91 4 0
45 17 7 81 8 47 24 42 95 10 5 0
64 68 19 100 12 51 67 36 102 56 23 21 0
79 29 70 80 74 101 55 32 11 78 60 85 82 0
86 27 28 77 41 93 20 73 66 18 34 30 49 61 0

Tabelle 12, Rangordnung transformierte Korrelationsmatrix

Die Anwendung des Complete-Linkage Algorithmus produzierte eine Fusionsreihenfolge mit entsprechenden Niveaus. Das jeweilige Niveau ist dabei auf die transformierte Korrelationsmatrix \mathcal{K}' , bezogen. Niedrige Niveaus, nahe bei null, bedeuten somit eine hohe Korrelation. Abgebildet sind unten die Fusionsreihenfolge und das entsprechende Dendrogramm.

Clusterreihenfolge	Niveau
(5,3)	0,12
(7,2)	0,24
(11,10)	0,26
((5,3),12)	0,32
(14,9)	0,33
((11,10),(7,2))	0,36
((5,3),12),13)	0,38
((11,10),(7,2)),8)	0,42
(4,1)	0,52
((5,3),12),13),15)	0,56
((5,3),12),13),15),((11,10),(7,2)),8))	0,64
((5,3),12),13),15),((11,10),(7,2)),8)),6)	0,78
((4,1),(14,9))	0,79
((4,1),(14,9)),((5,3),12),13),15),((11,10),(7,2)),8)),6))	0,92

Tabelle 13, Clusterreihenfolge und Niveaus

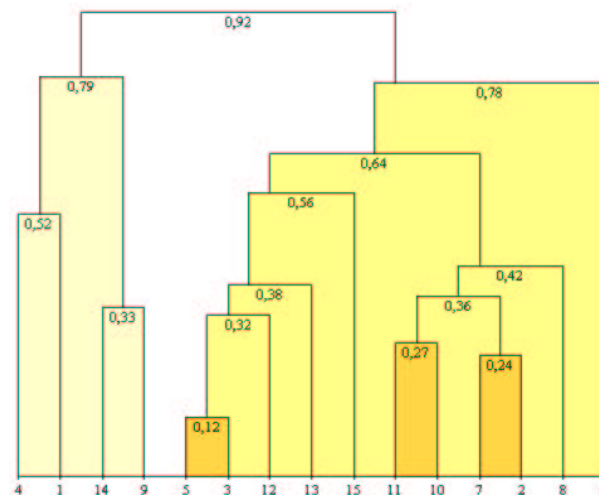


Abbildung 36, Dendrogramm zur Korrelationsmatrix \mathcal{K}' ,

Die Schattierungen in der Abbildung wurden für die spätere Auswertung des Dendrogramms vorgenommen. Die Bestimmung der Clusterzahl erfolgt, wie Abschnitt 6.5.3 beschrieben, erst in einem der folgenden Abschnitte. Die Tabelle der Fusionsreihenfolge beruht auf dem von mir implementierten Verfahren. Die Klammerausdrücke fassen Paare von Bearbeitungswegen oder Paare von Mengen von Bearbeitungswegen jeweils zusammen. Die Klammerreihenfolge steht aus diesem Grund in direkter Verbindung zur Fusionsreihenfolge. Bis auf die Fusionsniveaus kann das Dendrogramm aus dem letzten Klammerausdruck der Tabelle rekonstruiert werden.

Zur Durchführung der MDS wurde die Matrix K' , in einem ersten Schritt in das Programm Proxscal von SPSS eingelesen. Erst in einem zweiten Schritt erfolgt dann die Ermittlung des bereits vorgestellten adäquaten Stresses. Zur Wahl der Dimension wurde vorab mit untenstehenden Einstellungen die Entwicklung des roh-Stressmaß herangezogen:

```
Stress Konvergenz:          0,0001
Mindest Stress:            0,0001
Iterationen max.:          200
Ähnlichkeitstransformation: ordinal
Gebundene Beobachtungen lösen: nein
Anfangskonfiguration:      Simplex
```

Für ein- bis vierdimensionale Lösungen ermittelte Proxscal nachstehenden Stressverlauf mit zugehörigem Screeplot:

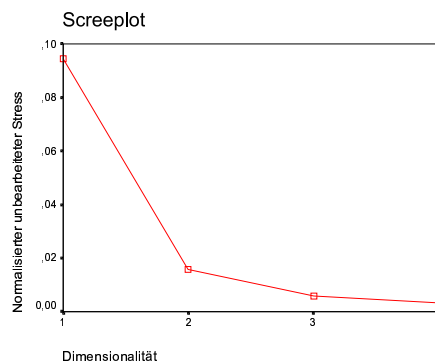


Abbildung 37, Scree Plot Proxscal

Der Screeplot von Proxscal weist nach dem Ellbow-Kriterium (vgl. [24], S. 109f, [13], S. 526) auf die Verwendung der zweidimensionalen Lösung. Der Stress 1 nach Kruskal ergibt 0,1176. Zur Ermittlung weiterer Kenndaten müssen die Ergebnisse der MDS näher analysiert werden. Im Punktraum wurden den Probanden Koordinaten zugewiesen:

Proband	Kodierung	1	2
1	A	0,032	-0,736
2	B	-0,194	0,241
3	C	0,376	-0,396
4	D	-0,795	-0,526
5	E	0,378	-0,420
6	F	1,098	0,596
7	G	-0,136	0,228
8	H	-0,301	-0,251
9	I	-1,013	0,606
10	J	0,089	0,195
11	K	0,110	0,013
12	L	0,403	0,031
13	M	0,681	-0,166
14	N	-0,763	0,081
15	O	0,034	0,506

Tabelle 14, Koordinaten der ausgewählten Lösung

Die vorgenommene Kodierungen findet sich in nachfolgender Graphik wieder. Bis auf Rotation, Stauchung oder Streckung ist sie im Weiteren ein wesentlicher Bestandteil der Interpretationsbasis.

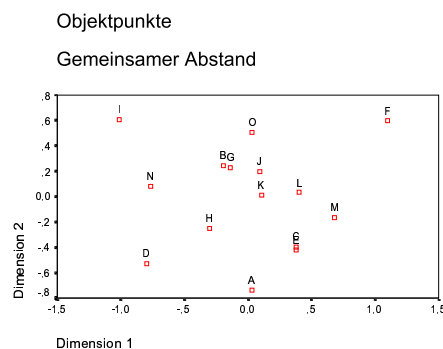


Abbildung 38, Graphische Darstellung der ausgewählten Lösung

Die Punkte haben dabei die folgenden Abstände voneinander (Distanzmatrix der berechneten Koordinaten):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
A	0,00														
B	1,00	0,00													
C	0,48	0,85	0,00												
D	0,85	0,97	1,18	0,00											
E	0,47	0,87	0,02	1,18	0,00										
F	1,71	1,34	1,23	2,20	1,25	0,00									
G	0,98	0,06	0,81	1,00	0,83	1,29	0,00								
H	0,59	0,50	0,69	0,57	0,70	1,64	0,51	0,00							
I	1,70	0,90	1,71	1,15	1,73	2,11	0,96	1,11	0,00						
J	0,93	0,29	0,66	1,14	0,68	1,09	0,23	0,59	1,18	0,00					
K	0,75	0,38	0,49	1,05	0,51	1,15	0,33	0,49	1,27	0,18	0,00				
L	0,85	0,63	0,43	1,32	0,45	0,90	0,57	0,76	1,53	0,35	0,29	0,00			
M	0,86	0,97	0,38	1,52	0,40	0,87	0,91	0,99	1,86	0,69	0,60	0,34	0,00		
N	1,14	0,59	1,23	0,61	1,25	1,93	0,64	0,57	0,58	0,86	0,88	1,17	1,46	0,00	
O	1,24	0,35	0,96	1,32	0,99	1,07	0,33	0,83	1,05	0,32	0,50	0,60	0,93	0,90	0,00

Tabelle 15, Distanzmatrix Koordinaten der ausgewählten Lösung

[illegible]

Zur Beurteilung einer MDS ziehe ich an dieser Stelle noch das Shephard Diagramm der zuvor erläuterten Analyse heran. Ein Beurteilung desselben erfolgt im Anschluss.


$$S_{\text{MO}}^3(d, \partial) := \sum_{k=1}^{104} L'_k(d, \partial).$$

121

und somit:

Eine Bewertung dieser Kennzahlen und des Diagramms erfolgt im nächsten Abschnitt. Auffällig ist, dass die beiden Stressmaße übereinstimmen. Aus der Festlegung der beiden Stressmaße in Kapitel 6 folgt jedoch, dass die Maße nur voneinander abweichen, wenn vorher nicht verbundene Ränge in der Approximation verbunden werden. Da die von der MDS vorgeschlagenen Distanzmatrizen jedoch keine verbundenen Ränge haben, müssen auch die beiden Maße übereinstimmen. \mathcal{D}_r (siehe Tabelle 6) muss vor der Anwendung der multivariaten Verfahren nicht mehr transformiert werden. Die Rangordnung der Distanzen ergibt sich unmittelbar:

[illegible]

Tabelle 17, Rangordnung der Distanzen

Daraus resultiert folgende Clusterreihenfolge mit tatsächlichen und normierten Niveau:

Clusterreihenfolge	Niveau	Normiertes Niveau
(9,4)	5	0,135
((9,4),14)	7	0,189
((((9,4),14),8)	12	0,324
(12,11)	13	0,351
((12,11),(((9,4),14),8))	16	0,432
(5,1)	18	0,486
((((12,11),(((9,4),14),8)),10)	18	0,486
((5,1),3)	21	0,568
(7,2)	22	0,595
(13,6)	23	0,622
((7,2),(((12,11),(((9,4),14),8)),10))	26	0,703
((13,6),((5,1),3))	30	0,811
((((13,6),((5,1),3)),((7,2),(((12,11),(((9,4),14),8)),10))))	31	0,838
((((13,6),((5,1),3)),((7,2),(((12,11),(((9,4),14),8)),10))),15)	37	1,000

Tabelle 18, Clusterreihenfolge mit Niveaus der Distanzen

Die Niveaus wurden so linear transformiert, dass ein Wert von 1 einem Niveau von 37 und die null einem Niveau von null entspricht. Im entsprechendem Dendrogramm sind die relativen Niveaus aufgeführt:

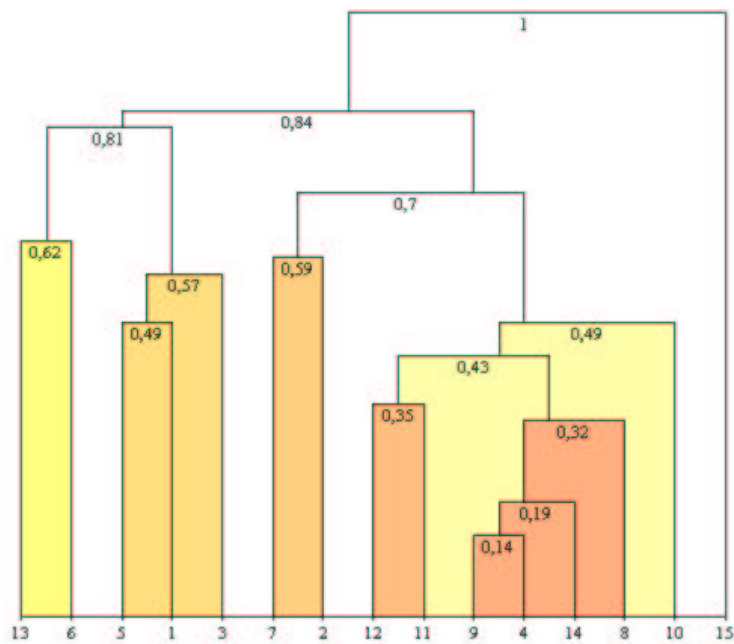


Abbildung 40, Dendrogramm der Distanzmatrix \mathcal{D}_r

Mit identischen Einstellungen bezüglich des Programms Proxscal (vgl. vorhergehende Ausführungen) erhält man für die Distanzen ebenfalls einen Screeplot:

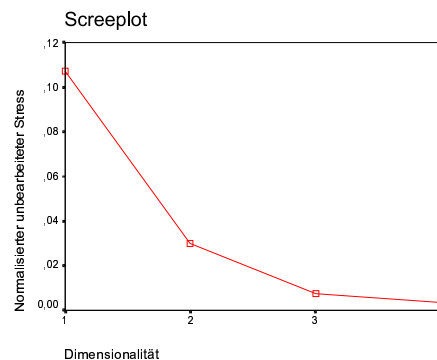


Abbildung 41, Screeplot Proxscal Distanzen

Der Plot legt ein zweidimensionales Modell nahe, das darüber hinaus Vergleichbarkeit mit der vorhergehenden Analyse garantiert. Die gefundene Lösung weist ein Stress 1 nach Kruskal von 0,1732 auf und liefert folgende Koordinaten:

Proband	Kodierung	1	2
1	A	-0,836	0,061
2	B	0,514	-0,079
3	C	-0,265	-0,690
4	D	-0,262	-0,025
5	E	-0,550	0,090
6	F	0,257	-0,724
7	G	0,747	0,585
8	H	-0,314	0,409
9	I	-0,160	-0,007
10	J	-0,028	0,444
11	K	-0,219	0,280
12	L	0,062	0,244
13	M	-0,506	-0,394
14	N	0,055	0,015
15	O	1,505	-0,209

Tabelle 19, Koordinaten der gefundenen Lösung

Auch hier findet sich die Kodierung im entsprechenden Diagramm wieder:

Objektpunkte

Gemeinsamer Abstand

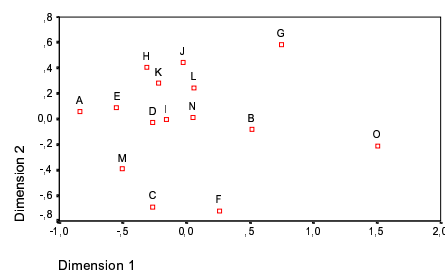


Abbildung 42, Graphische Darstellung der gefundenen Lösung

Die Distanzen der Punkte ergeben sich wie folgt:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
A	0,00														
B	1,36	0,00													
C	0,94	0,99	0,00												
D	0,58	0,78	0,67	0,00											
E	0,29	1,08	0,83	0,31	0,00										
F	1,34	0,69	0,52	0,87	1,15	0,00									
G	1,67	0,70	1,63	1,18	1,39	1,40	0,00								
H	0,63	0,96	1,10	0,44	0,40	1,27	1,08	0,00							
I	0,68	0,68	0,69	0,10	0,40	0,83	1,08	0,44	0,00						
J	0,89	0,75	1,16	0,52	0,63	1,20	0,79	0,29	0,47	0,00					
K	0,65	0,82	0,97	0,31	0,38	1,11	1,01	0,16	0,29	0,25	0,00				
L	0,92	0,56	0,99	0,42	0,63	0,99	0,76	0,41	0,34	0,22	0,28	0,00			
M	0,56	1,07	0,38	0,44	0,49	0,83	1,59	0,83	0,52	0,96	0,73	0,85	0,00		
N	0,89	0,47	0,77	0,32	0,61	0,77	0,90	0,54	0,22	0,44	0,38	0,23	0,69	0,00	
O	2,36	1,00	1,83	1,78	2,08	1,35	1,10	1,92	1,68	1,67	1,79	1,51	2,02	1,47	0,00

Tabelle 20, Distanzen der Proxscal-Lösung

Die dann ermittelten zugehörigen Rangordnungen ergaben sich zu folgender Dreiecksmatrix:

separat entsprechende Diagramme betrachtet, verglichen und verknüpft werden. In einem zweiten Schritt werden die hier gefundenen Indizien durch Rückgriff auf Ebenen höherer Datendichte untermauert und relativiert.

8.2.1 Strukturen bezüglich der Korrelation von Bearbeitungswegen

Zum Vergleich wurden die beiden Diagramme gegenüber gestellt, Gemeinsamkeiten hervorgehoben und in einem Gesamtdiagramm zusammengefasst:

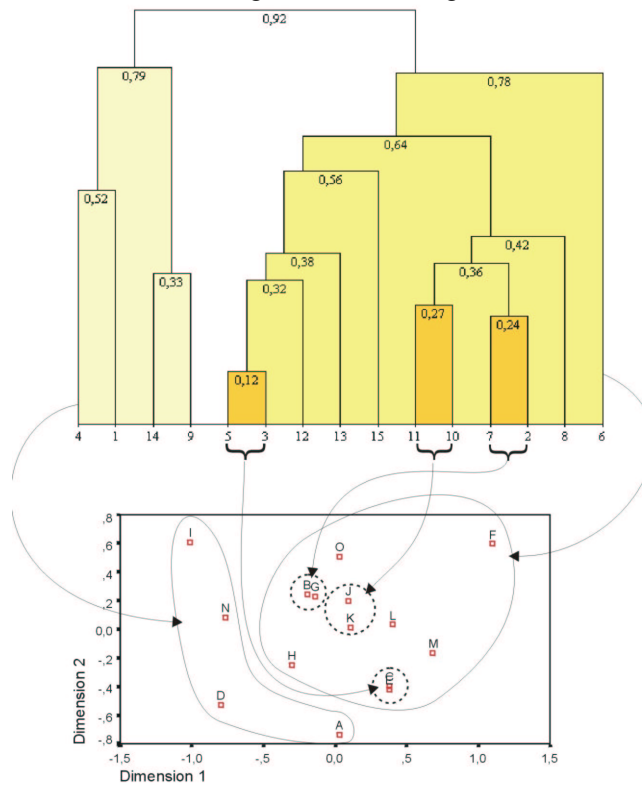


Abbildung 44, Räumliche Repräsentation und Dendrogramm Korrelation

Das Dendrogramm separiert zwei Cluster. Es handelt sich dabei um die Bearbeitungswege $G_1^k = \{A, D, I, N\}$ und $G_2^k = \{B, C, E, F, G, H, J, K, L, M, O\}$. Diese Struktur findet sich im Diagramm der MDS jedoch nicht unmittelbar wieder. Betrachtet man hingegen Unterstrukturen, von G_1^k bzw. G_2^k so finden sich durchaus Gemeinsamkeiten. Nimmt man z.B. die räumliche Anordnung der Bearbeitungswege von G_1^k , so finden sich in beiden Diagrammen die Paare von Bearbeitungsweisen $\{A, D\}$ und $\{I, N\}$ wieder. Das Ergebnis der MDS muss stets unter Berücksichtigung möglicher Transformationen, die invariant gegen die ordinale Struktur der jeweiligen Abstände sind, betrachtet werden. Hierzu gehören Stauchung und Streckung an beliebigen Achsen oder auch die Rotation und Spiegelung. Schon diese wenigen Transformationen zeigen, dass auch abweichende Diagramme auf dieselbe Datenstruktur zurückgeführt werden können. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen, ist die Gruppe von Bearbeitungsweisen G_1^k in beiden Diagrammen mit hierarchischen Unterstrukturen wiederzufinden. Die Bearbeitungswege von G_2^k sind auch in der räumlichen Repräsentation so

angeordnet, dass eine Separation zulässig erscheint. Vor allem die durch das agglomerative Verfahren zuerst zusammengefassten Paare von Bearbeitungswegen {C,E}; {J,K} und {B,G} sind ähnlich ihrer Fusionsniveaus repräsentiert, d.h. dass sie einen umso geringeren Abstand haben je kleiner ihr Fusionsniveau ist. Auch die Menge {B,G,H,J,K} lässt sich gemäß ihrer hierarchischen Struktur in beiden Diagrammen identifizieren. Eine Übersicht hierzu wird in Abbildung 45 wiedergegeben. Hier wurden diejenigen Hierarchiestufen, die in beiden Diagrammen wiederzufinden sind, durch Helligkeitsunterschiede visualisiert.

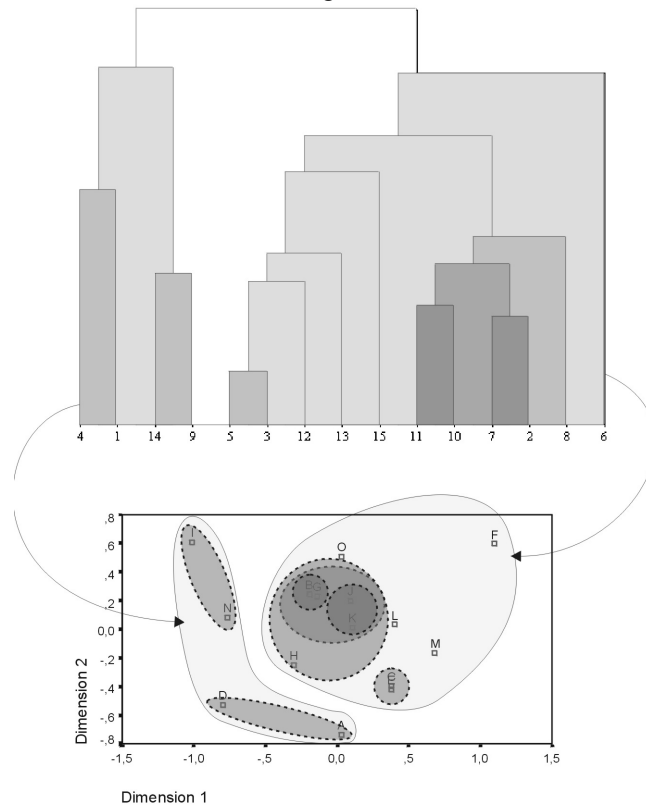


Abbildung 45, Visualisierung Hierarchiestufen Korrelation

Auf die entsprechenden Fusionierungsniveaus wurde dabei verzichtet, da das Niveau der Daten ohnehin keine Interpretation desselben zulässt. Hieraus ergeben sich unter Berücksichtigung der Definition des Korrelationskoeffizienten aus Abschnitt 6.3.8 folgende Fragen, zu deren Beantwortung die Zustandsmatrizen und Protokolle herangezogen werden:

- (i) Welche Gemeinsamkeiten zeigen sich bezüglich bestimmter Verhaltensweisen von Probanden (Regelverwendung) jeweils zwischen den Bearbeitungswegen {C,E}; {J,K}; {B,G} bzw. {A,D}; {I,N}?
- (ii) Gibt es inhaltliche Hinweise zur Entstehung der Gruppen von Bearbeitungswegen G_1^k bzw. G_2^k ?
- (iii) Durch welche latenten Variablen können die beiden Dimensionen des MDS-Diagramms erklärt werden?
- (iv) Welche inhaltliche Bedeutung haben die Cluster der Clusteranalyse?

Um die räumliche Repräsentation des Ergebnisses der MDS deuten zu können, muss zusätzlich die Anordnung der Teilmengen von Bearbeitungswegen zueinander berücksichtigt werden. Die jeweilige Interpretation von zugrundeliegenden Variablen soll erst nach der inhaltlichen Analyse vorgenommen werden.

Ein wichtiges Indiz dafür, dass Bearbeitungswege überhaupt hohe Korrelationen aufweisen können, ist die Länge derselben. Im Fall des Clusters von Bearbeitungswegen $\{C,E\}$ ist diese Ähnlichkeit gegeben. C hat eine Länge von 35 und E eine von 33. In beiden Bearbeitungswegen dominiert die Regel für das reguläre Fortkommen. Jedoch konnten auch Regeln aus den Regeltypengruppen G_2 und G_3 gefunden werden. Das bedeutet inhaltlich, dass die Probanden sowohl durch bewusste oder unbewusste Aktionen während der Programmbedienung, als auch durch Rechenfehler am Fortkommen innerhalb des Programms gehemmt wurden. In beiden Bearbeitungswegen dominiert aus der Gruppe G_2 eine Regel, die anzeigt, dass die Probanden falsch kürzten (Regel L). Im Bearbeitungsweg E ist sie sogar die einzige aus G_2 . Eine weitere Gemeinsamkeit der beiden Bearbeitungswege ist, dass jeweils keine Hilfen des Programms in Anspruch genommen wurden. Ebenfalls ähneln sich die Bearbeitungswege des Clusters $\{J,K\}$ in ihrer Länge (42 bzw. 37). Auch hier wird primär die Regel angewandt, welche reguläres Fortkommen im Programm anzeigt. Aus den Regelgruppen G_2 und G_3 sind in beiden Bearbeitungswegen Regeln zu finden, deren Unterstruktur aus meiner Sicht jedoch keine nennenswerten Besonderheiten aufweist. Beide Probanden nahmen Hilfen in Anspruch und folgten diesen in erster Linie ohne aktiv in Programmempfehlungen einzugreifen. Anders als bei den beiden angeführten Paaren von Bearbeitungswegen ist die Situation im Cluster $\{B,G\}$. Die Länge der Bearbeitungswege variiert leicht (27 bzw. 40), was jedoch lediglich am Rande erwähnt sei. Entgegen anderer Regeln dominiert bei diesen das reguläre Fortkommen nicht. Vor allem in G werden verstärkt Hilfen in Anspruch genommen (20 Regeln aus G_4 und 20 sonstige Regeln). Im Gegensatz hierzu wurden in $\{A,D\}$ kaum bzw. keine Hilfen in Anspruch genommen. Die Länge der Bearbeitungswege weicht erheblich voneinander ab (33 bzw. 18) und es dominiert jeweils das reguläre Fortkommen. Dies spiegelt sich auch in der recht geringen Korrelation und dem hohen Fusionierungsniveau wieder. Die Bearbeitungswege unterscheiden sich bezüglich den aus G_2 verwandten Regeln stark. So treten in Bearbeitungsweg A verstärkt Rechenfehler auf (12), in Bearbeitungsweg D kaum (1). Primär wurde dabei in A falsch gekürzt oder in \mathbb{N} falsch gerechnet. Das Cluster von Bearbeitungswegen $\{I,N\}$ weist einen hohen Grad an Homogenität auf. Die Längen der Bearbeitungswege sind vergleichsweise kurz (14 und 16). Die Regel zum regulären Fortkommen dominiert in beiden Fällen (jeweils 12). Weitere Indizien, die auf bemerkenswerte Zusammenhänge bezüglich der Häufigkeiten einzelner Regeln weisen, konnten nicht gefunden werden.

Das Cluster G_1^k mit $G_1^k = \{A,D,I,N\}$ besteht aus den bereits analysierten Unterclustern $\{A,D\}$ und $\{I,N\}$. In allen Bearbeitungswegen dominiert die Regel zum regulären Fortkommen. Einzig Bearbeitungsweg A weist eine Besonderheit in der Sparte G_2 auf. Betrachtet man das Diagramm zur MDS, so zeigt sich diese Besonderheit auch in der Platzierung des Bearbeitungsweges A. Um etwas tiefer in die Mikrostruktur der Probandensitzungen einblicken zu können, werden nun weitere Merkmale der Probandensitzungen betrachtet. Tabelle 22 liefert hierzu einen Überblick:

E01	E02	E03	E04	E05	E06	E07	E08	E09	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E23	E24	E25	E26	E27	E28	E29
Nutzt Tipp Optionen	Nutzt Hyperextoption	Nutzt Auswahnenü	Nutzt Zeige-Option	Nutzt Hilfenü / Karteikasten	Nutzt Taschenrechner (>0)	Nutzt Taschenrechner (>5)	Nutzt Taschenrechner (>10)	Nutzt Taschenrechner (>15)	Nutzt Bildschirm befragen	Ändert Lernwegempfehlungen	Klickt sich z.T. schnell durch Einführungen	Rechnet auch handschriftlich	Rechnet laut	Zählt mit den Fingern	z.T. nicht mit Programm beschäftigt / unaufmerksam	Spricht Rechner an / fragt o. antwortet Rechner	Liest Text von Bildschirm vor	Schülerfehler beim Kürzen	Typischer Additionsfehler	Rechenfehler in N / Falsch eingabe Zahl	Bedienungsfehler Eingabe gemischte Zahl	Bedienungsfehler bei Eingabe Summen	Bedienungsfehler Bruchstrich	Sitzung erfolgreich beendet	Bearbeitungsdauer >30min	Bearbeitungsdauer >60min	Bearbeitungsdauer >90min	Bearbeitungsdauer > 120min

Tabelle 22; Weitere Eigenschaften der Probandensitzungen

Die Eigenschaften E01-E10 charakterisieren die Nutzungseigenschaften des Probanden bezüglich der bereitgestellten Hilfen im Programm. Die Skalierung erfolgt bis auf die Charakteristika E06-E09 nominal. E06-E09 ermöglichen die ordinale Skalierung der Häufigkeit der Taschenrechnernutzung. E11 gibt an, ob der Proband von sich aus Lernempfehlungen ändert. Wenn Probanden die Lektion zur Addition des Programms bearbeiten, so durchlaufen sie neben den Übungsteilen auch Einführungen. Da einige Probanden sich rasant durch dieselben klickten, ohne Bildschirmseiten gezielt zu berücksichtigen, wurde Eigenschaft E12 in die Liste aufgenommen. E13-E18 beziehen sich eher auf das Verhalten des Probanden, speziell auch dem Verhalten, welches nicht den Zustandsmatrizen zu entnehmen ist. Sowohl handschriftliches Rechnen des Probanden, als auch mit den Fingern zählendes oder vom Bildschirm laut ablesendes Verhalten fand hier Berücksichtigung. Einige Probanden versuchten dem Rechner verbal Fragen zu stellen. Dieses Verhalten wurde in Merkmal E17 festgehalten. Unaufmerksamkeiten bzw. Beschäftigungen mit programmfremden Gegenständen wurden in E16 vermerkt. Im Gegensatz zu diesen Merkmalen stehen die Merkmale E19-E25 wieder in direktem Zusammenhang mit der Programmbedienung. Typische Fehler, wie sie zum Teil auch in den Regeln festgehalten wurden, können hier Probanden zugeordnet werden. Hervorzuheben ist E25, da hier vermerkt wurde, ob der Proband die Sitzung erfolgreich beendete, also das Programm zur Addition gemäß der vorgegebenen Konventionen durchlief. E26-E29 unterteilen die Bearbeitungsdauer der Lektion in Intervallen von jeweils einer halben Stunde.

Ziel war es mit Hilfe dieser zusätzlichen Charakteristika, die Informationen aus den Protokollen zusammenfassen, einen tieferen Einblick in Zusammenhänge zwischen Probanden und Bearbeitungswegen zu gewinnen. Aus G_1^k wurde bereits eine Teilmenge von Bearbeitungswegen ($\{D, I, N\}$) besonders hervorgehoben. Verglichen werden nun zusätzlich die Merkmale E01-E29 mit Hilfe der formalen Begriffsanalyse. Der folgende Begriffsverband repräsentiert Gemeinsamkeiten und Unterschiede⁶⁵:

⁶⁵ Die zugehörige Kontextmatrix ist in Abschnitt 10.5 zu finden.

herbeigeführt wurden. Der Bearbeitungsweg F stellt sich, wie bereits erwähnt, als Extremfall dar. Der Bearbeitungsweg hat eine Länge von 193 (!). Die meisten Zustandsübergänge wurden durch Regeln der Regelgruppe G_3 vorgenommen. Das heißt, dass primär durch Einflussnahme des Probanden auf die Programmbedienung diese Vielzahl von Regeln zustande kam. Um auch in Bezug auf G_2^k weitere Informationen zur Analyse nutzen zu können, werden die Teilmengen $\{B,G,O\}$, $\{J,K\}$ und $\{C,E\}$ jeweils getrennt betrachtet und bezüglich der Merkmale aus Tabelle 22 mit Hilfe der formalen Begriffsanalyse untersucht. Zur Teilmenge $\{B,G,O\}$ von Bearbeitungswegen ergibt sich folgender Begriffsverband:

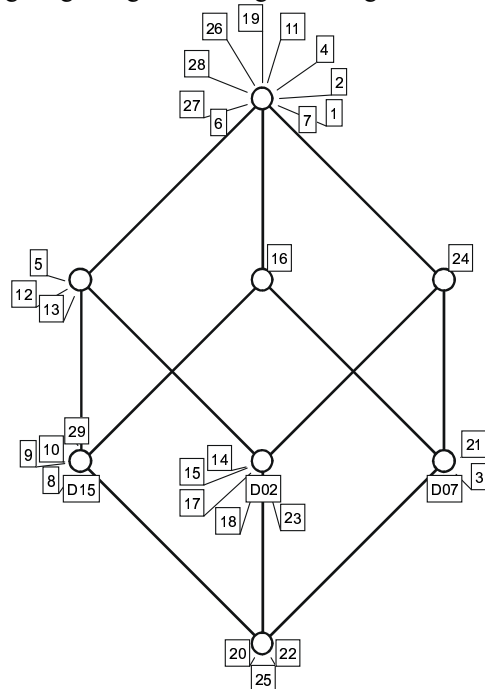


Abbildung 47; Begriffsverband Probanden 2, 7, 15

Die hier verglichenen Probanden nutzten alle häufig Hilfoptionen des Programms. Die Merkmale E01-E10, welche diese Optionen probandenbezogen beschreiben, finden sich so, im Gegensatz zum vorhergehenden Begriffsverband, im oberen Teil des Diagramms wieder. Alle Probanden nutzten die Tippooption, Hypertextinfos und die Zeigeoption des Programms. Der Karteikasten bzw. die Hilfedateien des Systems wurde von den Probanden 2 und 15 in Anspruch genommen. Die Auswahloption des Programms, welche es den Probanden erlaubte, Fragen des Programms in Form von Multiple-Choice Aufgaben zu beantworten, wurde nur von Proband 7 (Bearbeitungsweg G) genutzt. Alle nutzten den integrierten Taschenrechner. Proband 2 und 7 nutzten ihn mehr als fünf-, Proband 15 sogar mehr als fünfzehnmal. Die Möglichkeit den Bildschirm zu befragen, wurde nur von Proband 15 genutzt. Alle (!) Probanden änderten Lernwegempfehlungen des Programms. Durch Einführungen klickten sich die Probanden 2 und 15 z.T. schnell, handschriftlich rechneten jedoch ebenfalls nur diese beiden Probanden. Proband 2 rechnete zudem noch laut, sprach den Rechner direkt an, las Texte vom Bildschirm vor und zählte z.T. mit den Fingern. Unaufmerksamkeiten, bzw. Beschäftigung mit nicht programmbezogenen Gegenständen konnten bei den Probanden 15 und 7 beobachtet werden. Den Schülerfehler, falsch zu kürzen, vollzogen alle Schüler im

Rahmen ihrer Sitzung. Der typische Additionsfehler tauchte bei keinem der Probanden auf. Rechenfehler in \mathbb{N} konnten nur bei Proband 7 festgestellt werden. Die durch E22 bis E24 beschriebenen Bedienungsfehler finden sich bei keinem (E22), nur einem (E23 bei Proband 2) oder maximal zwei der Probanden (E24 bei 2 und 7) wieder. Die Probanden bearbeiteten das Programm alle mindestens 90 Minuten, Proband 15 sogar länger als zwei Stunden. Bemerkenswert scheint, dass keiner der Probanden die Lektion zur Addition erfolgreich abschloss. Da dies ein wichtiges Kriterium dafür ist, ob Schüler nach der Sitzung im Sinne des Programms erfolgreich weiterarbeiten können, soll anhand des MDS-Diagramms hierzu ein Überblick gegeben werden. In allen als Kreisen dargestellten Bearbeitungswegen wurde die jeweilige Sitzung erfolgreich beendet:

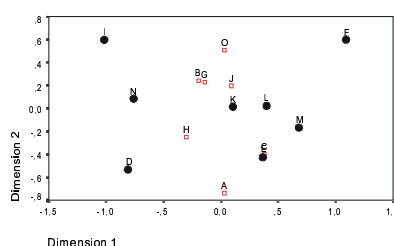


Abbildung 48, MDS-Diagramm mit Vermerk zum Lektionserfolg

Diejenigen Bearbeitungswege, die zu Probanden gehören, welche die Lektion nicht erfolgreich abschlossen, sind weder besonders weit rechts, noch besonders weit links angeordnet. Ob die Platzierung Rückschlüsse dahingehend zulässt, dass die Probanden erfolgreich mit dem Programm weiterarbeiten könnten oder nicht, bedarf einer besonderen Analyse. Diese Tatsache soll vorerst lediglich als interessantes Indiz festgehalten werden.

Der Begriffsverband zu den Probanden, denen die Bearbeitungswege J und K zugeordnet wurden, hat folgende Gestalt:

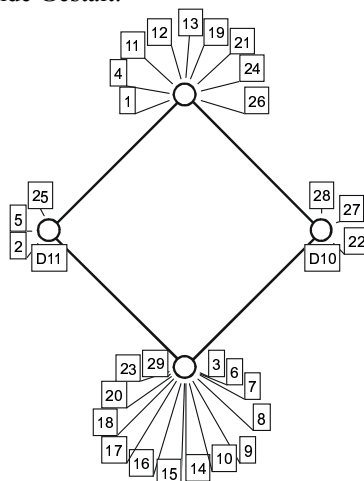


Abbildung 49, Begriffsverband Probanden 10 und 11

Auch in diesem Fall werden aufgrund der Übersichtlichkeit nur Unterschiede zwischen den Probanden hervorgehoben. Anzumerken ist dabei sicher, dass Proband 11 (Bearbeitungsweg K) auf mehr Hilfoptionen des Programms zugreift. Proband 10 (Bearbeitungsweg J) weist das Merkmal E22 (Bedienungsfehler bei der Eingabe einer gemischten Zahl) nur alleine auf. Bemerkenswerter sind aus meiner Sicht jedoch die restlichen Unterschiede. Trotz der nahen räumlichen Anordnung im Diagramm der MDS benötigte Proband 10 mehr als 90 Minuten zur Bearbeitung der Lektion und schloss sie nicht erfolgreich ab, während Proband 11 lediglich etwas mehr als 30 Minuten benötigte und dieselbe mit Erfolg beendete. Betrachtet man die Zustandsmatrix und verfeinerte Daten, so relativiert sich dieses Bild. Proband 11 schloss die Sitzung nach ungefähr 56 Minuten, Proband 10 brach nach etwa 97 Minuten ab. Der Grund dafür, dass Proband 10 die Lektion im Sinne des Programms nicht erfolgreich abschloss, begründet sich darin, dass er im Laufe der Bearbeitung aus einer Übung heraussprang und im Anschluss in diese zurückkehrte, was das Programm augenscheinlich nicht akzeptierte. Die Gemeinsamkeiten überwiegen aus diesem Grund und selbst in den Mikrostrukturen sind noch viele verträgliche Merkmale zu finden. Der letzte Begriffsverband im Rahmen der Analysen zur Korrelation von Bearbeitungswegen ist der von den Probanden 3 und 5, welche sowohl eine hohe Korrelation (0,77), als auch eine fast identische Platzierung im MDS-Diagramm erhielten:

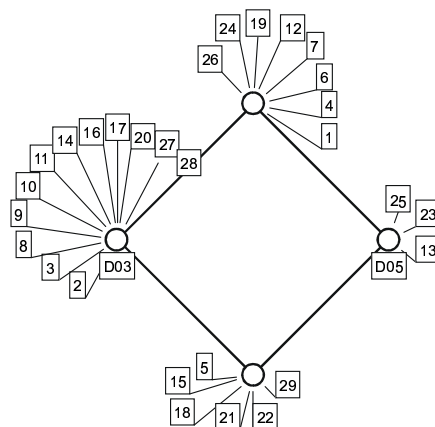


Abbildung 50, Begriffsverband Merkmale Probanden 3 und 5

Die Unterschiede im Bereich der tieferliegenden Strukturen scheinen bei Betrachtung des Begriffsverbands nicht unerheblich. Während Proband 3 (Bearbeitungsweg C) Hypertext- und Auswahloptionen nutzt, den Taschenrechner häufiger als fünfzehnmal in Anspruch nimmt und Lernwegempfehlungen ändert, nutzt Proband 5 den Taschenrechner lediglich mindestens fünfmal und verlässt sich auf die Vorgaben des Programms. Es konnte beobachtet werden, dass Proband 5 auch handschriftlich rechnete. Bei Proband 3 wurde hingegen festgestellt, dass dieser laut rechnete und den Rechner direkt ansprach. Im Rahmen von Schülerfehlern rechnete Proband 3 falsch im Sinne des typischen Schülerfehlers aus dem Bereich der Addition. Die Lektion erfolgreich beenden konnte nur Proband 5.

Zur Interpretation der beiden Dimensionen der MDS werden die vorhergehenden Informationen implizit verarbeitet. Zum Vergleich der Probanden wurde in diesem Fall die Korrelation von Bearbeitungswegen herangezogen. Ich schlage zur Interpretation der zugrundeliegenden latenten Variablen und der Lage der Achsen folgende Konstellation vor:

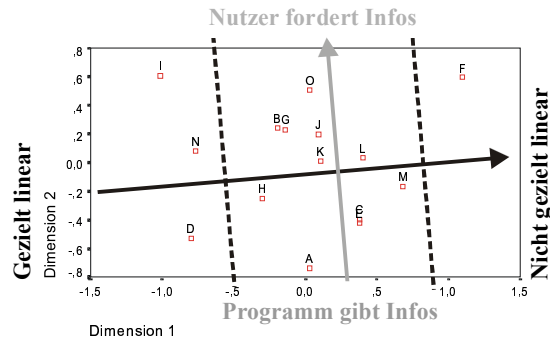


Abbildung 51, MDS-Diagramm mit Achsen und Interpretation

Das Verhalten von Probanden bezüglich der von der Korrelation von Bearbeitungswegen berücksichtigten Aspekte kann durch zwei latente Variablen beschrieben werden. Eine Variable beschreibt, inwiefern der Proband gezielt linear arbeitet, das heißt möglichst wenig Aufgaben wiederholt bzw. nicht oft zurückspringt. In dieses Bild passt sowohl der Ausreißer rechts im Diagramm als auch die bereits beschriebene Teilmenge links. Doch auch die in der Mitte angesiedelten Bearbeitungswege sind unter Berücksichtigung der Güte des Diagramms durchaus stimmig mit dieser Interpretation. Die angegebene Interpretation der zweiten Dimension scheint nicht stimmig mit den Bearbeitungsweisen I, N und D. Da jedoch in diesen Fällen sowieso nur wenige Regeln außer der zum regulären Fortkommen verwandt wurden, wird das Gesamtbild nur wenig verzerrt. Unten im Diagramm sind nach der vorgeschlagenen Interpretation Bearbeitungswege angesiedelt, in welchen Probanden aufgrund ihrer Verhaltensweisen Informationen vom Programm angeboten bekommen. Das heißt, dass das Programm z.B. auf Fehleingaben reagiert. Bei den Bearbeitungsweisen, die eher oben angesiedelt sind, fordert der Proband Informationen vom Programm, indem er Hilfsfunktionen aufruft oder sich Lösungswege anzeigen lässt. Die Unterscheidung könnte auch im Sinn der Nutzung des Programms als Tutor oder Trainer gefasst werden. Die angesprochenen Unstimmigkeiten könnten durch die Wahl von krummlinigen Achsen gemindert werden. Dies unterbleibt jedoch aus Gründen der Einfachstruktur, da der Stimmigkeitszugewinn inhaltlich nichts ändern würde. Entsprechend kann auch die Interpretation der beiden Cluster aus Abbildung 44 mit Einschränkung erfolgen. Für die Bearbeitungswege D, I und N ist eine Sammelbezeichnung wie „Fast ausschließlich reguläres Fortkommen“ oder „Lineares fehlerfreies Fortkommen“ passend. Proband 1 mit seinem Bearbeitungsweg A passt nicht in dieses Bild. Aufschluss gibt das Diagramm der MDS in Verbindung mit der Korrelationsmatrix. So weist Bearbeitungsweg A durchaus verhältnismäßig hohe Korrelationen zu den Bearbeitungsweisen C oder E auf. Das Diagramm der MDS gibt diese auch wieder. Sowohl C, als auch E wurden jedoch bereits fusioniert. Aus diesem Grund ist die Zuordnung von Bearbeitungsweg A zum linken Cluster des Dendrogramms aus Abbildung 44 eher als Eigenheit des Complete-Linkage Verfahrens zu sehen, als als inhaltlich nutzbare Zuordnung. Das rechte Cluster gruppiert Bearbeitungswege, die entweder von Hilfen, Rechenfehlern oder sonstigen Programminteraktionen gekennzeichnet sind. Eine sinnvolle Bezeichnung findet sich aus diesem Grund auch durch schlichte Relativierung der Bezeichnung des zuvor angeführten

Clusters. Ich schlage aus diesem Grund „nicht unbedingt reguläres und lineares Fortkommen“ als Bezeichnung vor.

8.2.2 Strukturen bezüglich der Distanz von Bearbeitungswegen

Ähnlich wie zu Beginn des vorigen Abschnitts werden in einem ersten Schritt die beiden zentralen Diagramme zur Distanz zwischen Bearbeitungswegen gegenübergestellt.

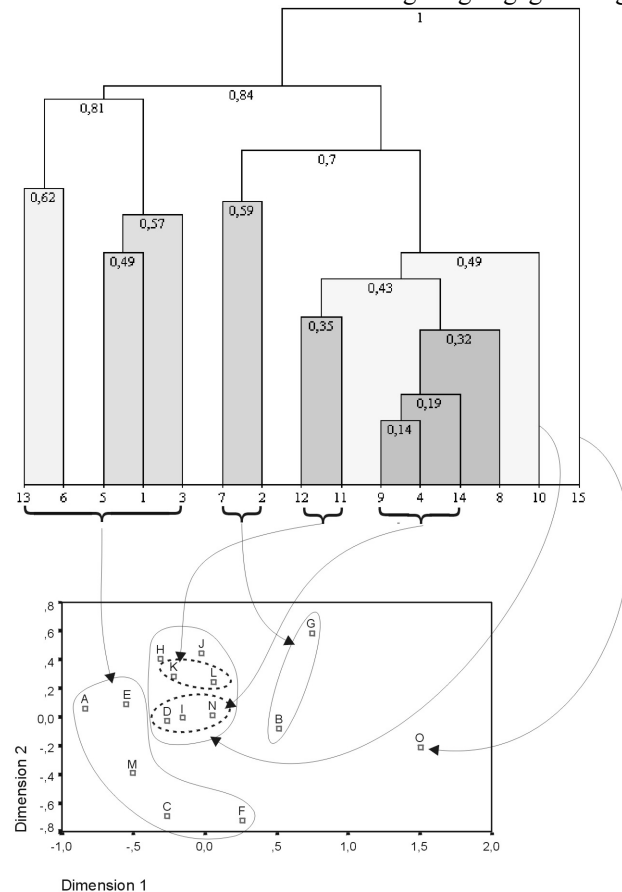


Abbildung 52, Räumliche Repräsentation und Dendrogramm Distanzen

Auffällig ist der Ausreißer O, der in beiden Analysen hervortritt. Im Dendrogramm wurden, um seine Diskussion zu erleichtern, einige Diagrammteile in Graustufen abgesetzt. Separat betrachtet werden sollen nun die Mengen von Bearbeitungswegen $G_1^d = \{F, M\}$; $G_2^d = \{A, C, E\}$; $G_3^d = \{B, G\}$ und $G_4^d = \{D, H, I, J, K, L, N\}$. Weder G_1^d noch G_2^d sind im Diagramm der MDS lokal als Gruppe von Punkten zu identifizieren. Zur Vereinigung der beiden Mengen wurde jedoch in Abbildung 52 ein Bereich markiert, welcher die Punkte, die die Bearbeitungswege von G_1^d und G_2^d repräsentieren, enthält. Im vorangegangenen Kapitel wurden einige Kriterien zur Abschätzung der Güte einer MDS vorgestellt. Die Stressmaße $S_{SMO}^4(d, \partial)$ und $S_{MO}^4(d, \partial)$ sind mehr als doppelt so hoch wie die bei der jeweiligen Korrelation ermittelten. Kruskals Stress 1 weicht zwar auch entsprechend, jedoch nicht in diesem Maße ab. Das Shepard-Diagramm zeigt, bei welchen Paaren von Punkten große Invertierungslängen auftreten. Zu diesem Zweck

wurde Abbildung 43 derart überarbeitet, dass extreme Peaks mit den entsprechenden Punktpaaren beschriftet wurden:

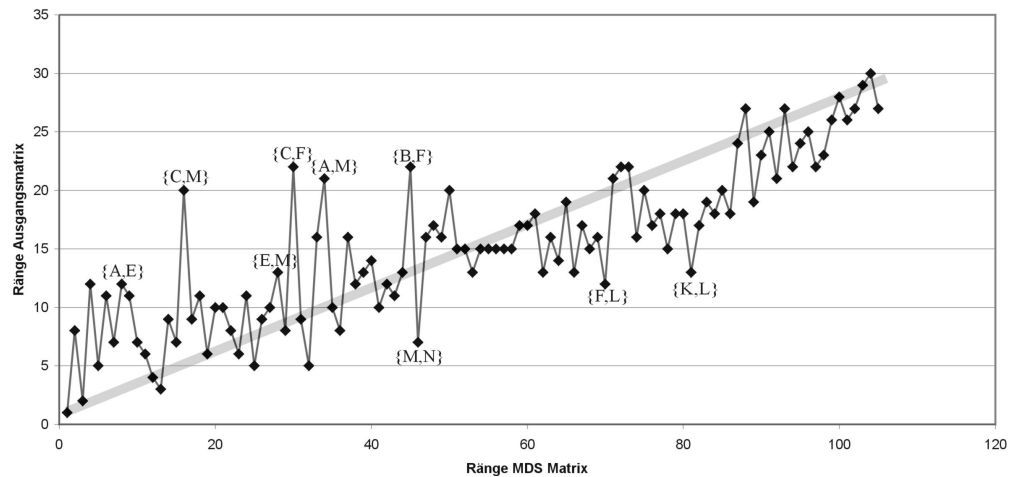


Abbildung 53, überarbeitetes Shepard-Diagramm mit Punktpaaren

Es zeigt sich, dass viele der Bearbeitungswege aus G_1^d und G_2^d genannt werden. Im Diagramm bedeutet eine Abweichung nach oben, dass der Abstand der Punkte im Diagramm größer sein müsste. Eine Abweichung nach unten kann gedeutet werden als ein zu großer Abstand zwischen den Punktpaaren. Mit der Interpretation des Diagramms muss also vor allem in dem Teil, in welchem G_1^d und G_2^d angesiedelt sind, höchst sensibel umgegangen werden. Im Gegensatz hierzu lassen sich G_3^d und G_4^d im Diagramm der MDS gut wiederfinden. In Bezug auf G_4^d spiegeln sich sogar einige Fusionseigenschaften wieder. Hierzu sei auf Abbildung 54 verwiesen.

Es ergeben sich unter Berücksichtigung der Definition der Distanz von zwei Bearbeitungsweisen aus Abschnitt 6.3.7 folgende Fragen, zu deren Beantwortung im Anschluss die Zustandsmatrizen und Protokolle herangezogen werden.

- (i) Warum nimmt Bearbeitungsweg O eine derart besondere Position ein? Wie ist diese Rolle inhaltlich zu gewichten und welche Aufgaben oder welches Verhalten scheint besonders relevant?
- (ii) Welches Probandenverhalten und welche Aufgaben des Programms charakterisieren Gemeinsamkeiten der Bearbeitungswege von G_1^d und G_2^d , wo liegen Unterschiede?
- (iii) Welche inhaltlichen Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten weisen die Teilmengen von G_4^d , insbesondere {D,I,N} bzw. {K,L} bezüglich der Verhalten bei verschiedenen Aufgaben auf?

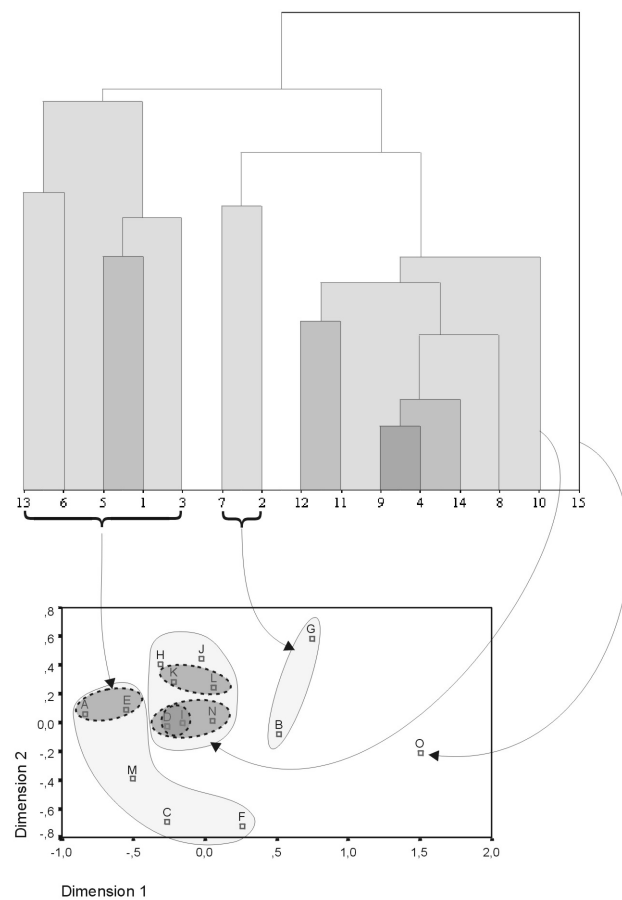


Abbildung 54, Visualisierung Hierarchiestufen Distanzen

Beachtet man die Anzahl möglicher Regeln, die den Probanden zur Verfügung standen, so wäre es bei zufälliger Auswahl wahrscheinlich, dass große Abstände den Normalfall darstellen. Betrachtet man die entsprechende Distanzmatrix, fällt in bestimmten Bereichen eine hohe Homogenität von Abständen auf, was sicher nicht zuletzt zur schlechteren Güte der MDS führte. Um über die Verteilung der Distanzen einen Überblick zu gewinnen, wurden dieselben in einem Histogramm angetragen. Die Klassifizierung geschieht in Intervallen der Breite 5. Zusätzlich wurde von SPSS eine Gaußkurve approximiert und entsprechend angetragen, deren Deutung jedoch bewusst unterbleibt. Das Histogramm bestätigt die Häufung der Distanzen um 21 und weist die relativ geringe Standardabweichung 6,83 aus:

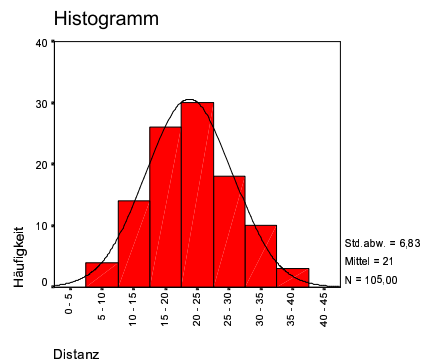


Abbildung 55, Histogramm der Distanzen

Wie bereits erläutert, wurden die Regeltypen zusätzlich gruppiert. Zu Beginn von Kapitel 7 wurde diese Reduktion mit Hilfe einer Rechnung und eines Sheparddiagramms hinterfragt. Die relativ geringen Abweichungen weisen darauf hin, dass Verhaltensweisen bezüglich bestimmter Regeltypen bei den Probanden in den beschriebenen Kategorien häufig stabil sind und die Distanz von Bearbeitungsweegen so nur relativ wenig beeinflusst wird.

Um letztendlich Interpretationen vornehmen zu können, werden auch in diesem Fall Bearbeitungswege direkt miteinander verglichen. Der Vergleich wird in erster Linie durch die Suche nach Gemeinsamkeiten als nach Unterschieden bestimmt, da Gemeinsamkeiten in Bezug auf die berücksichtigte Stichprobe eher auf programmspezifische Eigenheiten hinweisen. Dieses Vorgehen scheint in den meisten, jedoch nicht in allen Fällen sinnvoll. Einer dieser Sonderfälle ist sicher Proband 15 (Bearbeitungsweg O). In beiden Diagrammen stellt sich dieser Proband als Ausreißer dar. Das heißt, dass entweder der Umgang oder die Verhaltensweisen bei bestimmten Aufgaben von denen anderer Probanden abweicht. Die genauere Betrachtung der entsprechenden Zustandsmatrix zeigt, dass durchweg bei fast allen Zuständen Hilfen bzw. Hilfsmöglichkeiten des Programms in Anspruch genommen wurden. Links im Diagramm der MDS angeordnet befinden sich die Repräsentanten der Bearbeitungswege von G_1^d und G_2^d . Die Bearbeitungswege von G_2^d haben untereinander ähnliche Abstände. Die Probanden 1 und 3 gelangen in ihren Bearbeitungen jeweils nur bis Übung 5 und ließen die dann folgenden Aufgabenteile unbearbeitet. Während Proband 3 (Bearbeitungsweg C) eher durch Interaktion im Bereich Programmnutzung in den Ablauf des Programms eingriff, wird die Sitzung von Proband 1 (Bearbeitungsweg A) durch Fehler beim Rechnen geprägt. Proband 5 (Bearbeitungsweg E) weist zu den beiden anderen diskutierten Probanden durchaus Gemeinsamkeiten auf. Auch er stockt, wie auch Proband 1, durch einen Bedienungsfehler bei Übung 5 und Rechenfehler bei Übung 2. Im Gegensatz zu ihnen durchläuft er jedoch alle Aufgaben. Abschließend sei bemerkt, dass der Bearbeitungsweg von Proband 5 mit jeweils gleicher Häufigkeit Regeltypen der Kategorien G_2 und G_3 aufweist.

Im Rahmen der Analysen zur Korrelation von Bearbeitungsweegen war Proband 6 (Bearbeitungsweg F) ein Außenseiter. Diese Position kann in der Analyse der Abstände nicht in ähnlichem Maß (vgl. Abbildung 52) bestätigt werden. Die Probanden 6 und 13 weisen insofern Gemeinsamkeiten auf, als dass sie alle Aufgaben durchliefen. Während Proband 6 jedoch bei fast jeder Aufgabe steuernd eingriff, nahm Proband 13 das nur sporadisch vor. An der Zustandsmatrix von Proband 6 erkennt man, dass er primär bei der ersten Übung hängt. Eine derart spezielle Übung lässt sich im Bearbeitungsweg von Proband 13 nicht ausmachen. In Anlehnung an die Analysen zur Korrelation aus dem vorigen Abschnitt wurde das

Diagramm der MDS bezüglich der Probanden untersucht, die die Sitzung erfolgreich im Sinne des Programms abschlossen:

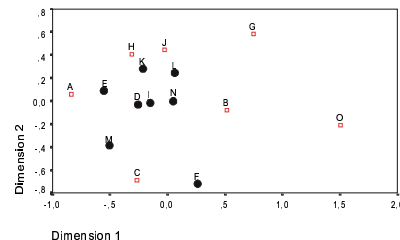


Abbildung 56, Diagramm mit Hervorhebung von erfolgreichen Probanden

Man könnte auch hier durchaus Strukturen vermuten. Begründet werden sie zum einen durch die Anforderung des Programms, zum anderen durch die Definition des Abstandes von Bearbeitungsweegen. So haben erfolgreiche Probanden zumindest alle das Programm regulär durchlaufen und daher natürlich auch einige Regeln gemein. Diejenigen Probanden, die das Programm erfolgreich abschlossen, sind primär in der Mitte des Diagramms zu finden. Es darf jedoch nicht vernachlässigt werden, dass der Abstand zweier Bearbeitungswege kein unmittelbares Indiz zur erfolgreichen Bearbeitung des Programms ist. So bedarf es nur der Abänderung einer Regel, um einen erfolgreichen Verlauf in einen erfolglosen zu verwandeln. Dies soll bei den verbleibenden Analysen Berücksichtigung finden. Die Probanden 4, 9 und 14 durchliefen das Programm erfolgreich und fast linear. Das führte nicht nur zu hohen Korrelationen, sondern auch zu geringen Abständen, wobei unter Korrelationen auf die Definition aus Abschnitt 6.3.8 und unter Abständen die Definition aus Abschnitt 6.3.7 zu verstehen ist. Insofern bleibt das Argument erhalten, dass die Homogenität dieser Teilmenge letztendlich zu ihrer Platzierung führte. Die Probanden 11 und 12 hatten vergleichbare Probleme bei der Bearbeitung der Übungen 2, 5 und 8. Beide durchliefen das Programm durch die häufige und primäre Verwendung des Regeltyps R und weisen aus diesem Grund einen relativ geringen Abstand zueinander auf.

Es fällt auf, dass einige Probanden aufgabenspezifische Regelverwendungen aufweisen. Andere Probanden zeigen sich konsistent in ihrem Verhalten, ihr Verhalten hängt also nicht von den jeweils bearbeiteten Aufgaben ab. Analysiert man die Bearbeitungswege bezüglich dieses Aspekts, so treten im unteren linken Teil des Diagramms primär Probanden mit aufgabenspezifischen Regeltypenverwendungen, im rechten Teil eher Bearbeitungswege mit globalen Regeltypenverwendungen auf. Eine Dimension soll aus diesem Grund wie folgt interpretiert werden:

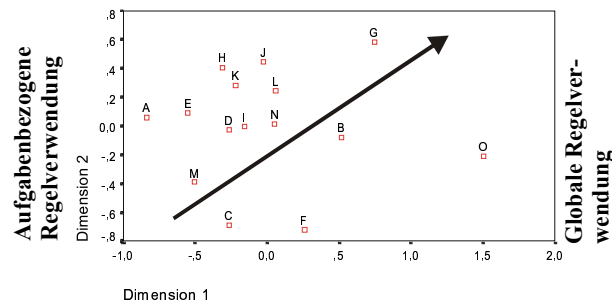


Abbildung 57, MDS-Diagramm mit Achse und Interpretation

Die Deutung der zweiten Dimension unterbleibt, da aus meiner Sicht die Indizien für eine Interpretation zu unscharf sind. Selbst die Deutung der hier vorgeschlagenen Achse muss unter Berücksichtigung der zu Beginn dieses Abschnitts genannten Einschränkungen erfolgen. Insofern bleibt die vollständige Deutung durch zugrunde liegende latente Variablen ebenfalls unscharf. Auch die Interpretation einzelner Cluster unterbleibt aus diesem Grund. Indizien zu ihrer Interpretation wurden jedoch bereits angeführt.

8.3 Situationen der Untersuchung

Aufgrund der vorgestellten Analysen und den hiermit verbundener Indizien, stellen sich Fragen, deren Beantwortung in Bezug auf die Fragestellungen dieser Arbeit und ihrer untersuchungsspezifischen Aspekte (vgl. Abschnitt 6.5.5) von Interesse sind. Die Probanden 4, 9 und 14 sind sowohl bei der Korrelation, als auch beim Abstand jeweils in Clustern zusammengefasst worden. Diese Probanden durchliefen das Programm erfolgreich. Die Bearbeitung erfolgte weitestgehend linear und die Bearbeitungswege zeigen nur wenige Regeln, die auf Probleme oder Fehlbedienungen weisen. In Bezug auf die Programmbearbeitung kann man diese Probanden somit als erfolgreich bezeichnen. Welches Verhalten führte jedoch zu diesem Erfolg? Die Protokolle werden zur Charakterisierung der drei Probanden herangezogen und bezüglich möglicher Ursachen untersucht werden. Ähnliches trifft auf die Probanden 2 und 7 zu. In den jeweiligen Analysen fallen auch sie in jeweils ein Cluster. Im Kontrast zu den Probanden 4, 9 und 14 beendeten sie das Programm jedoch nicht erfolgreich. Im Rahmen der entsprechenden Analysen werden somit Indizien für dieses Datum gesucht.

Da im Rahmen der Untersuchungen ein konkretes Programm mit all seinen Stärken und Schwächen verwandt wurde, ist es interessant, welche Besonderheiten die Untersuchung in diesem Bereich aufzeigte. Auffällig ist hierbei Übung 5. Fast alle Probanden stockten bei dieser Aufgabe oder benötigten zumindest mehr als einen Anlauf zu ihrer Lösung. Im Folgenden werden die betreffenden Probanden einzeln mit jeweils bei dieser Aufgabe verwandten Regeltypen aufgeführt: 1 (H,D); 2 (H,M); 3 (Z); 4 (D); 5 (D); 6 (Z,H); 7 (H); 10 (D,H); 11 (Z,H); 12 (H,B,I,Z,N); 13 (M,K); 14 (A,I,L); 15 (H,I,U). Aufgrund der Häufung von Probanden, die bei dieser Aufgabe Probleme hatten, soll untersucht werden, inwieweit die spezielle Aufgabenstellung oder die Struktur des Programms für diese Massierung von Problemen verantwortlich ist.

8.3.1 Untersuchung der Protokolle ausgesuchter Probanden

Vorbemerkung: Die jeweiligen Zitate und Verweise dieses Abschnitts beziehen sich auf die jeweiligen Textprotokolle⁶⁶.

Der Proband 4 begann relativ schnell damit, parallel handschriftlich zu arbeiten (vgl. Zeilen 8, 17, 19 etc.). Der Wechsel zwischen dem Rechnen auf Papier und der Arbeit mit dem Rechner prägte die gesamte Sitzung. Meldungen des Rechners las er, ebenso wie Texte aus den Einführungen, häufig laut vor (vgl. u.a. Zeilen 3, 37, 162). Auf Meldungen des Rechners reagierte er insofern konstruktiv, als dass er Meldungen unmittelbar aufgriff und neue Rechenversuche startete (vgl. Zeilen 37-38, 98-99). Der Proband stellte sich selbst Fragen in Bezug auf die Rechnung (siehe z.B. Zeile 147: „9/6, kann man das kürzen?“) und macht Bemerkungen bezüglich des eigenen Verhaltens bzw. zu den eigenen Vorgehensweisen (vgl. Zeile 38: „Ich glaub ich fang noch mal neu an“). Auch durchaus ausführliche Rechnungen dachte er laut (siehe z.B. Zeilen 39-59) und schien die eigene Leistung zu beurteilen (z.B. Zeile 61: „Oh, Gott, ich hab aber lang gebraucht, lang gebraucht, lang gebraucht“). Die Zustandsmatrix zeigt, dass der Proband primär Schwierigkeiten im Bereich der ersten beiden Übungen hatte. Die Schwierigkeiten beschränkten sich im Wesentlichen auf das Kürzen von Brüchen (Zeilen 12-13, 21-22, 29-30, 36-37) und einen Lektionsabbruch durch nicht zielgerichtete Programmbedienung (Zeilen 95-98). Im Bereich von Übung 5 schaffte es der Proband erst nach Hilfestellung, den vom Programm gewünschten Term einzugeben (siehe Zeilen 172-187 und B1-B9, vor allem B4: „Ja, bloß das ‚+‘ geht nicht in die Mitte“). Die weiteren Übungen bearbeitete der Proband konsequent und erfolgreich. Auch die Einführungen wurden in den meisten Fällen hinreichend berücksichtigt, was ich hier an den jeweiligen Verweildauern festmache. Ausnahme ist das dritte Durchlaufen der ersten Einführung nach dem bereits beschriebenen Lektionsabbruch. Hier benötigte der Proband nur 12 Sekunden (vgl. Zeile 100), was auf das schnelle Durchlaufen ohne besondere Kenntnisnahme der Bildschirmseiten hinweist.

Proband 9 redete im Gegensatz zu dem bereits beschriebenen Probanden nur sehr wenig (siehe lediglich Zeilen 54, 101, 107). Auch fertigte er keine handschriftlichen Aufzeichnungen an. Bei seiner Bearbeitung der entsprechenden Lektion ist in zwei Fällen das Pausieren bzw. die nicht ausschließliche Konzentration auf das Programm zu beobachten (Zeilen 76-77, 98). Die einzig beobachtbaren Fehler in der Bearbeitung beschränkten sich auf die Falscheingabe von Zahlen (Zeile 24-25, 93-94), wobei unklar ist, ob es sich um Rechenfehler oder eine falsch verstandene Aufgabe handelt. Dass diese Unterscheidung bei der durchgeführten Untersuchung nicht geleistet werden kann, da die Probanden möglichst selbstständig und ungelenkt mit dem Programm umgehen sollten, war jedoch a priori klar. In Bezug auf diesen Probanden lässt sich im Wesentlichen festhalten, dass das zielsichere, akribische, ruhige und ausschließlich rechnergestützte Abarbeiten der Aufgaben als zentrales Merkmal der Sitzung beobachtet werden konnte.

Es verbleiben Ausführungen zu Proband 14. Er weist die Besonderheit auf, dass die typische Fehlerstrategie bei der Addition von Brüchen auftrat. Dies geschah im Rahmen der 5. Übung durch Eingabe (vgl. Zeilen 60-67: $\frac{1}{6} + \frac{6}{7} + \frac{25}{84} = \frac{32}{97}$) und bei der 4. Erläuterung durch lautes Sagen des Ergebnisses (Zeilen 145-146: $3\frac{2}{7} + 2\frac{1}{3} = 5\frac{3}{10}$). Auch im Gespräch mit mir wurde die subjektive Richtigkeit einer Lösung durch den Probanden bestätigt (vgl. B17-B20 des ersten Dialogs). Der Schüler wechselte nur einmal zum Rechnen auf Papier (vgl. Zeilen 21-22) und notierte hier nur eine einfache Division. Die verbalen Äußerungen beschränken sich

⁶⁶ Bei Interesse zur Einsicht bitte ich um Mail. Maillink unter www.pallack.de

meist auf das Sagen von Zahlen (siehe hierzu Zeile 20: „121“, 140: „2“), das Sagen von Ergebnissen (z.B. Zeile 44: „gleich $4/3$ “) oder einfachen Aussprüchen (vgl. u.a. Zeile 41: „Oh!“, 108: „Toll“, 119: „Toll“). Die Einführungen wurden hinreichend langsam zur Kenntnis genommen und teilweise auch vorgelesen (vgl. Zeile 144). Der Proband hakte bei Übung 5. Grund ist zum einen der bereits angeführte Rechenfehler, zum anderen die Umrechnung von Brüchen in gemischte Zahlen (vgl. Zeilen 77-80). So schaffte er es zwar korrekt ganzzahlige Anteile abzuspalten, unternahm dies jedoch nicht in dem Sinn, dass der ganzzahlige Anteil möglichst groß werden sollte. Auch das nicht vollständige Kürzen von Brüchen impliziert, dass der Proband die entsprechende Aufgabe nochmals bearbeiten musste (vgl. Zeilen 123-124). Außer der recht stringenten Bearbeitung der jeweiligen Aufgaben lassen sich ansonsten aus meiner Sicht keine grundlegenden Charakteristika, außer den Angeführten, beobachten.

Ziel dieser Beschreibung war es, mögliche Eigenschaften der Probanden zu finden, die Indizien auf Verhaltensweisen liefern, welche mögliche Gründe für das erfolgreiche und fast lineare Durchlaufen des Programms sein könnten. Die Beschreibungen zeigen, dass den Probanden das stringente Bearbeiten von Übungen gemein ist. Diese Eigenschaft entnimmt man auch den entsprechenden Zustandsmatrizen und somit den entsprechenden Analysen. Aufgrund der vorgenommenen Vergleiche konnte also auch bereits im Vorfeld mit diesem Teilergebnis gerechnet werden. Tatsächlich erweist sich das Probandenverhalten als heterogen. Sowohl die Fehler, als auch die jeweiligen Verhaltensweisen, lassen sich nicht durch die angeführten Gemeinsamkeiten erklären. So rechnet Proband 4 konsequent, Proband 9 überhaupt nicht und Proband 14 nur sporadisch handschriftlich. Dass die parallele Verwendung von Stift und Papier ein Garant oder Kriterium für das erfolgreiche Durchlaufen des Programms ist, kann somit ausgeschlossen werden. Auch die intensiven Selbst- und Rechnergespräche von Proband 4 finden sich überhaupt nicht oder nur sehr beschränkt im Verhalten der anderen Probanden wieder. Auch in diesem Punkt kann nicht verallgemeinert werden. In Bezug auf die hier beschriebenen Probanden und deren Verhaltensweisen kann festgehalten werden, dass vom erfolgreichen Durchlaufen des Programms **kein Rückschluss** auf das jeweils hier berücksichtigte Verhalten gezogen werden kann. Unberücksichtigt blieben jedoch noch Unterschiede zu anderen Probanden, die im Rahmen der übrigen Analysen beachtet wurden und erst in einem der folgenden Abschnitte zusammengefasst werden.

Bei der zweiten Gruppierung handelt es sich um die Probanden 2 und 7, die nun zuerst einzeln, dann zusammenfassend näher betrachtet werden. Proband 2 begann recht früh, Hilfen des Programms zu nutzen (siehe Zeilen 10, 15, 17, 33). Das führte dazu, dass Übung 1 mehrfach bearbeitet werden musste. Die 1. Erläuterung, welche natürlich Hinweise zum sinnvollen Vorgehen enthielt, wurde außer im ersten Fall jeweils nur wenige Sekunden betrachtet (vgl. Zeilen 37, 109). Mitteilungen des Rechners wurden offensichtlich wahrgenommen und zum Teil verbal wiederholt (siehe hierzu Zeile 69: „Ein Formelteil fehlt...“ oder Zeile 612). Auch reagiert der Proband mit Äußerungen auf Rückmeldungen und einige Aufgaben des Rechners (vgl. Zeile 179: „Ja, wie bitte?“, Zeile 554: „In unechte Brüche, das ist einfach“, Zeile 596: „Erweitern, ja erweitern, weiß ich auch (...)“). Der Rechner wurde teilweise direkt angesprochen und beinahe beschimpft (Zeile 639: „Ach, du Penner ey (...)“, Zeile 723: „Was? Hast du einen Knall?“) aber auch gebeten oder der Proband entschuldigte sich bei ihm (Zeilen 223: „Bitte, bitte, bitte, bitte, bitte, ...“, Zeile 231: „Alles zeigen, tut mir leid.“, Zeile 253: „Bitte, bitte, ach ist doch scheißegal (...)“). Das rechnergestützte Rechnen wird sowohl durch regelmäßige parallele handschriftliche Arbeit (vgl. u.a. Zeilen 86-88, 123-125, 162-163, 234-236), als auch verbal unterstützt (siehe hierzu u.a. Zeilen 39-47, 77-98, 329-335). Dass der Proband mit den Fingern zählt, konnte ebenfalls beobachtet werden (Zeile 301,

666). Neben diesen doch recht zielgerichteten oder zumindest unmittelbar mit dem Programm in Beziehung stehenden Äußerungen und Verhaltensweisen, fielen auch solche auf, die nicht diesen Bereichen zuzuordnen sind. So

- nutzt der Proband seinen Mund als Resonanzkörper zur Geräuscherzeugung (Zeilen 689-691).
- schmeißt er sich in den Stuhl oder beschäftigt sich anderweitig mit diesem (vgl. u.a. Zeilen 577, 583, 592) .
- summt und trällert er Melodien (siehe u.a. Zeilen 510, 512-516, 532).

Stets kehrte er jedoch zur Arbeit mit dem Programm zurück. Der interne Taschenrechner wurde nur sporadisch verwandt (z.B. Zeilen 334-337, 685-686), Lernwegempfehlungen des Rechners jedoch häufig geändert (siehe z.B. Zeile 166, 201, 239). Das geschah sogar so, dass ein erfolgreiches Durchlaufen der Lektion zur Addition unmöglich gemacht wurde (vgl. Zeile 326, 393, 544). In meiner Anwesenheit nahm der Proband von dieser Vorgehensweise Abstand und verhielt sich bei Lernwegempfehlungen entsprechend (siehe z.B. zweiter und dritter Dialog), jedoch auch in Phasen der Abwesenheit war der Umgang teilweise sinnvoll (vgl. z.B. Zeile 659). Die Lektion erfolgreich abschließen konnte der Proband aufgrund des konsequenten Vorgehens des Programms trotzdem nicht. Der Umgang des Probanden mit dem Programm war an einigen Stellen von Bedienungsfehlern gekennzeichnet (vgl. u.a. Zeile 65-69, 270-272, 604), die sich jedoch während der Arbeit mit dem Programm regulierten und nicht hervorstachen. Das Verhalten des Probanden scheint insgesamt uneinheitlich. Zum einen wird gezielt und engagiert gearbeitet, was sich auch in entsprechenden verbalen Äußerungen zeigte, zum anderen werden Kriterien des Programms missachtet und der Proband scheint nicht ganz bei der Sache zu sein. Charakteristisch sind jedoch die häufigen verbalen Äußerungen, die zum Teil den Probanden selbst, zum Teil auch den Rechner betreffen.

Auch Proband 7 greift bereits in einem frühen Stadium der Programmbearbeitung auf Hilfen des Programms zu (vgl. hierzu z.B. Zeilen 8-13, 22, 58). Der Taschenrechnereinsatz erfolgte früh (siehe z.B. Zeilen 26-28, 33-34), jedoch auch nicht allzu häufig. Unmittelbar nach Beginn der Lektionsbearbeitung nahm der Proband Änderungen bei den Lernwegempfehlungen vor (vgl. Zeile 39, 74, 90, 107 usw.), was verhinderte, dass die Lektion erfolgreich abgeschlossen werden konnte. Da der Schüler das Programm auf diese Weise sehr schnell durchlief und in andere Lektionen gelangte, wurde er von mir auf diesen Umstand hingewiesen (vgl. zweiten Dialog) und begann erneut mit der Bearbeitung der Übungen zur Addition. Hier verharrte er und musste die erste Übung mehrfach bearbeiten (vgl. Zeilen 227-341). Der weitere Fortgang im Programm erfolgte wiederum durch das Ändern von Lernwegempfehlungen (vgl. Zeile 341). Der Proband schaffte es meist nicht, einfache Brüche zu kürzen und brach oft an den Stellen ab, an denen Brüche gekürzt werden mussten (siehe hierzu exemplarisch Zeilen 262-266, 271-280). Doch auch Rechenfehler im Bereich der natürlichen Zahlen fielen auf (vgl. z.B. Zeile 18-24: $83+85=24$, Zeile 331: $12+14=16$). Neben einfachen Lauten (siehe z.B. Zeilen 203, 321) gab der Proband verbal recht wenig von sich. Lediglich eine emotionale Äußerung fällt hier auf, nachdem er nach einem Bedienungsfehler am Anfang der Lektion landete (Zeile 417: „(...) Ich hasse es!“). Zum Ende der Bearbeitungszeit zeigten sich vermehrt ablenkende Aktivitäten (vgl. Zeilen 369-428). So schaut er auf die Uhr oder aus dem Fenster, pfeift und singt leise, schlägt auf einzelne Tasten oder bewegt den Stuhl. Die Bearbeitung der Lektion durch den Probanden ist also primär durch die Umgehung des Kürzens von Brüchen und bewusster Einflussnahme auf Vorschläge des Programms gekennzeichnet.

Bei den beiden Probanden 2 und 7 sind durchaus Gemeinsamkeiten zu erkennen. Scheinbar bewusst nahmen beide in Kauf, den Kriterien des Programms nicht genügen zu können. Sie änderten Lernwegempfehlungen in der Weise ab, dass nach den Wertungsgesichtspunkten des Programms eine erfolgreiche Bearbeitung unmöglich wurde. Auch den frühen Zugriff auf Hilfen, unmittelbar nach Beginn der Lektion, haben beide Probanden gemein. Während bei Proband 2 durchaus von einer Vielfalt von Fehlerquellen gesprochen werden kann, scheinen die Probleme von Proband 7 in der Unfähigkeit, Brüche kürzen zu können, angesiedelt zu sein. Das Programm schaffte es natürlich nicht, diesen Umstand aufzufangen bzw. das Problem zu lokalisieren, was dazu führte, dass der Proband lange Zeit probierte, Aufgaben zu lösen, jedoch stets wieder an ähnlichen Stellen scheiterte. Während Proband 2 sich häufig verbal äußerte, blieb Proband 7 bis auf wenige Ausnahmen still. Auch im Fall dieser Probanden scheinen daher mit dem lauten Rechnen oder Denken weder positive, noch negative Eigenschaften assoziierbar. Verhaltensweisen, die nicht streng dem Umgang mit dem Programm zuzuordnen sind, zeigten beide Probanden. Vor allem das Singen oder Summen von Melodien fällt hier auf. Mögliche Folgerungen aus diesem Verhalten möchte ich Kapitel 9 vorbehalten. Der Vergleich zeigt, dass aus den Analysen durchaus Rückschlüsse auf das Verhalten der beiden Probanden möglich waren. Beide versuchten, die Beurteilungsmerkmale des Programms zu umgehen oder zumindest sie unscharf auszulegen. Trotz der Kenntnis der Kriterien des Programms, welche nicht zuletzt im Rahmen der Vorbesprechung vorgestellt wurden, versuchten die beiden Probanden, das Programm *irgendwie* erfolgreich abzuarbeiten. Welchen Zweck sie tatsächlich verfolgten (z.B. Maximierung der Abwechslung, Suchen nach Erfolgserlebnissen, Testen des Programms, Spielen mit dem Programm) bleibt im nachhinein unklar und wäre sicher auch im Rahmen von Gesprächen kaum erfahrbare gewesen, da es sich scheinbar um Umgehungsstrategien handelt, die wahrscheinlich in irgendeiner Weise gerechtfertigt worden wären. Durchführbar hingegen ist wiederum der Vergleich dieser Beobachtungen mit den Einschätzungen der Probanden bezüglich des Programms, welche durch einen Fragebogen abgefragt wurden. Dieser wird in einem der nächsten Abschnitte vorgestellt.

8.3.2 Analyse einer Übung durch Rückgriff auf die Protokolle

Abschließend wird protokollbezogen eine Übung des Programms analysiert. Die beobachteten Verhaltensweisen sollen dabei helfen, mögliche Gründe für das hochfrequentierte Stocken der Probanden aufzufindig zu machen. Da sehr viele Probanden beschrieben werden müssen, wird die Analyse in tabellarischer Form vorgenommen. Die hinreichende Überblickbarkeit soll so gewährleistet werden. Natürlich sind die Analysen feiner als die vorgenommenen Kodierungen, die ja letztendlich nur auf einen (entscheidenden) Grund für das Fortkommen im Programm verweisen. Um die Situation, in der sich die Probanden befanden vorzustellen, wird exemplarisch eine Aufgabe, in der Form, wie sie die Probanden erhielten und eine Musterlösung des Programms vorgestellt:

Berechne und schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl:

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{5} + \frac{3}{10}$$

=

Abbildung 58, Übung 5 des Programms Bruchrechnen

Berechne und schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} + \frac{8}{5} + \frac{3}{10} && | \text{Hauptnenner} \\
 & = \frac{5}{10} + \frac{16}{10} + \frac{3}{10} && | \text{Brüche addieren} \\
 & = \frac{5+16+3}{10} && | \text{Zähler addieren} \\
 & = \frac{24}{10} && | \text{kürzen} \\
 & = \frac{12}{5} && | \text{in gemischte Zahl umwandeln} \\
 & = 2 + \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Abbildung 59, Musterlösung Übung 5 des Programms Bruchrechnen

Der Nutzer des Programms wird aufgefordert, drei Brüche zu addieren und das Ergebnis anschließend als gemischte Zahl zu schreiben. Die vom Programm vorgeschlagenen Rechenschritte müssen in dieser Form nicht vollends eingehalten werden. Die Probandenlösungen können also vom gezeigten Weg abweichen. Die letztendliche Darstellung der gemischten Zahl übernimmt das Programm selbst. Vom Nutzer wird die Eingabe von Termen der Art $a + \frac{b}{c}$ erwartet (Siehe Abbildung 59). Bei den Probanden konnten im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabe folgende Probleme oder nicht notwendigen Aktionen beobachtet werden:

Proband, Regeltypen	Ursachen für das nicht erfolgreiche Bearbeiten der Aufgabe
1 (H,D)	<ul style="list-style-type: none"> • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben • Fehler bei Eingabe einer gemischten Zahl • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen
2 (H,M)	<ul style="list-style-type: none"> • Lässt sich vom Rechner einen Rechenschritt vorführen • Rechenfehler beim Erweitern eines Bruches • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben
3 (Z)	<ul style="list-style-type: none"> • Rechenfehler beim Erweitern eines Bruches • Zähler von Brüchen beim Addieren nicht mit Erweiterungsfaktor multipliziert
4 (D)	<ul style="list-style-type: none"> • Endergebnis wurde nicht wie verlangt gekürzt • Gibt ohne Rechnung ein ungekürztes Endergebnis an
5 (D)	<ul style="list-style-type: none"> • Gibt ohne Rechnung ein ungekürztes Endergebnis an
6 (Z,H)	<ul style="list-style-type: none"> • Gibt ohne Rechnung ein ungekürztes Endergebnis an • Fehler bei Eingabe einer gemischten Zahl • Aktiviert Multiple-Choice-Option des Programms • Springt zurück in Einführung • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben • Eingabe einer natürlichen Zahl statt eines Bruches • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen • Fehler beim Kürzen eines Bruches
7 (H)	<ul style="list-style-type: none"> • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen

10 (D,H)	<ul style="list-style-type: none"> • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen • Rechenfehler beim Erweitern eines Bruches • Fehler bei Eingabe einer gemischten Zahl • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben
11 (Z,H)	<ul style="list-style-type: none"> • Wandelt Endergebnis nicht in gemischte Zahl um • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben • Lässt sich vom Rechner einen Rechenschritt vorführen • Fehler beim Umwandeln eines Bruches in eine gemischte Zahl • Springt zurück in Einführung
12 (H,B,I,Z,N)	<ul style="list-style-type: none"> • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben • Holt sich Hypertexthilfen • Wandelt Bruch nicht so in eine gemischte Zahl um, dass der ganzzahlige Anteil möglichst groß wird • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen • Rechenfehler bei der Addition natürlicher Zahlen • Fehler beim Umwandeln eines Bruches in eine gemischte Zahl • Springt zurück in Einführung
13 (M,K)	<ul style="list-style-type: none"> • Nenner bei der Addition gleichnamiger Brüche nicht beibehalten bzw. falsche Zahl eingegeben • Gibt nur einen Teil der Rechnung ein • Endergebnis wurde nicht wie verlangt gekürzt, bzw. umgewandelt
14 (A,I,L)	<ul style="list-style-type: none"> • Addition gemäß des Musters $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ • Wandelt Bruch nicht so in eine gemischte Zahl um, dass der ganzzahlige Anteil möglichst groß wird • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen • Versucht, den rechnerinternen Notizblock zu nutzen • Holt sich Hypertexthilfen • Endergebnis wurde nicht wie verlangt gekürzt, bzw. umgewandelt
15 (H,I,U)	<ul style="list-style-type: none"> • Lässt sich Rechnung vom Rechner vorführen • Lässt sich vom Rechner einen Tipp geben • Fehler beim Umwandeln eines Bruches in eine gemischte Zahl • Verlässt die Übung durch einen Bedienungsfehler

Tabelle 23, Auffälligkeiten bei der Bearbeitung von Übung 5

Viele der Probanden ließen sich vom Rechner Hilfen geben. Diese gestalteten sich recht unterschiedlich. Das Spektrum der Hilfen reicht vom Zeigen einzelner Rechenschritte über die Tipp-Option bis zur vollständigen Vorführung der Aufgabe. Auch scheinbar nicht unmittelbar einsichtige syntaktische Forderungen des Programms führten zu Komplikationen. Einige Schüler gaben direkt Endergebnisse ein, welche vom Programm jedoch nicht akzeptiert wurden. Doch auch Fehler bei der Eingabe der gemischten Zahl, was jedoch in der vorhergehenden Einführung erläutert wurde, sind durchaus üblich und kamen häufig vor. Dass Schüler sich verrechnen oder nicht wissen auf was bei der Umformung von Brüchen in gemischte Zahlen zu achten ist, konnte ebenfalls beobachtet werden. Der typische Fehler im Bereich der Addition wurde bei Proband 14 festgestellt. Dieses breite Feld möglicher Quellen weist darauf hin, dass den Probanden bei dieser Aufgabe derart viele Fertigkeiten abverlangt wurden, dass Fehler bei der Bearbeitung sehr wahrscheinlich waren. So mussten die Schüler

nicht nur Brüche richtig erweitern und anschließend addieren, sondern auch an entsprechender Stelle das Endergebnis in eine gemischte Zahl umwandeln und zusätzlich neue syntaktische Regeln beachten. Jedoch auch die Aufgabe mit ihrer Lösung selbst bringt die Schüler augenscheinlich dazu, vom Programm nähere Informationen zu fordern. Darauf weisen die vielfältigen Zugriffe auf die Hilfoptionen hin. Insgesamt scheint es die Kombination neuer formaler Forderungen mit üblichen Fehlerquellen zu sein, die die Besonderheit der Aufgabe und ihrer Bearbeitung ausmacht, die von kaum einem der Probanden direkt bewältigt werden konnte.

8.4 Der Anschlussstest

Im Anschlussstest sollten die Schüler zeigen, ob sie die Inhalte der behandelten Lektionen verstanden, die vermittelten Techniken beherrschen und auch in nicht rechnergestützten Kontexten anwenden konnten. Der Test enthielt 11 Aufgaben und wurde in den meisten Fällen innerhalb von 50 Minuten gelöst. Die Aufgaben sind im Folgenden verkürzt dargestellt. Der Originaltest umfasste 14 Din-A4 Seiten und ließ ausreichend Raum für Nebenrechnungen und Notizen. Er ist im Anhang einzusehen. Jeweils bei den Aufgaben sind die absoluten Lösungsquoten der Aufgabenteile abgedruckt. Der Test wurde von insgesamt 14 der 15 Probanden bearbeitet. Proband zehn nahm aus überzeugenden akuten familiären Gründen nicht teil. Seine Erwähnung in den zuvor ausgeführten Analysen ist davon natürlich nicht betroffen. Nach der Vorstellung der jeweiligen Aufgaben wird kurz das Erwartungsbild erläutert und geklärt, welche hervorzuhebenden Schülerfehler diagnostiziert wurden. Zur Diagnose wurde auch ein Gespräch mit dem jeweiligen Probanden geführt. Da es im Rahmen der vorliegenden Fallstudie natürlich durchaus interessant ist, welche Lösungen einzelne Schüler jeweils anboten, sind einige Schülerarbeiten beigelegt. Um sich letztendlich einen Überblick darüber zu verschaffen, welche Schüler welche Aufgaben angemessen lösen oder nicht lösen konnten, wird in einer Kontextmatrix festgehalten, inwieweit die Probanden dem Erwartungsbild entsprachen. Die Kontextmatrix wird dann mit Hilfe der formalen Begriffsanalyse und multivariater Verfahren ausgewertet. Die Erwartungen werden jeweils aufgabenweise entwickelt und vorgestellt.

1. Addiere und kürze das Ergebnis vollständig. Schreibe ggf. als gemischte Zahl:

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} =$	b) $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} =$	c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$	d) $\frac{1}{3} + 4 =$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">14</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">14</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">13</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">12</div>
e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$	f) $3 + \frac{1}{5} =$	g) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} =$	h) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} =$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">12</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">13</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">14</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">14</div>

In Aufgabe 1 wurden den Probanden jeweils zwei Zahlen zur Addition gegeben. Die jeweilige Summe sollte ggf. als gemischte Zahl geschrieben werden. Verlangt wurde, dass die Schüler die Regel zur Addition von Brüchen konsequent in verschiedenen Fällen anwandten. Auch Lösungen, bei welchen unmittelbar ein Ergebnis aufgeschrieben wurde, erfüllen aus meiner Sicht diese Anforderung. Dass die Bearbeitung der Aufgabe meist gelang, zeigen die hohen Lösungsquoten. Jedoch traten auch einige typische Fehler auf. Proband eins löste lediglich 5 der 8 Aufgaben richtig. Die Fehler entsprachen denen systematischer Schülerfehler:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{3} + \frac{4}{1} = \frac{1}{3} + \frac{4 \cdot 12}{1 \cdot 12} = \frac{1}{3} + \frac{48}{12} = \frac{1}{3} + 4 = 4\frac{1}{3}$$

Abbildung 60, Schülerfehler Proband 1 Aufgabe 1

Bei Bearbeitung der oberen Aufgabe erweitert der Proband zunächst richtig. Anschließend addiert er jedoch Zähler und Nenner separat, was der Diagnose aus dem Vortest entspricht. Beim zweiten Beispiel wurde die natürliche Zahl 4 falsch in die Menge der Brüche eingebettet. Der Proband beging diesen Fehler konsequent. Ebenfalls fehlerhaft gelöst wurden Teilaufgaben von den Probanden 4, 9 und 14:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

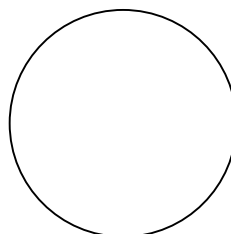
Abbildung 61, Schülerfehler Proband 4 Aufgabe 1

$$\frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{3} + \frac{4}{1} = \frac{1}{3} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{1}{3} + 4 = 4\frac{1}{3}$$

Abbildung 62, Schülerfehler Proband 14 Aufgabe 1

Die Probanden 4 und 9 lösten die oben angeführte Teilaufgabe identisch. Hier wurde falsch erweitert. Wie der Fehler zustande kam, konnten die Probanden im Anschluss jeweils nicht mehr rekonstruieren. Möglich scheinen Rechenfehler innerhalb der natürlichen Zahlen oder eine additive Strategie beim Erweitern. Erwartet wurde, dass die Schüler Aufgaben dieses Typs weitgehend richtig lösen konnten. Den Anforderungen genügen sollen aus diesem Grund Probanden, die maximal eine der acht Aufgaben fehlerhaft lösten. Nicht gekürzte Ergebnisse oder Ergebnisse, die nicht als gemischte Zahl geschrieben wurden, bleiben dabei unberücksichtigt. In diesem Sinne haben alle, außer Proband 1, die Aufgabe zufriedenstellend gelöst.

2a) Färbe zuerst die Hälfte des Kreises rot, dann anschließend noch ein Viertel blau.



14

b) Welchen Teil des Kreises hast Du insgesamt gefärbt?

12

c) Man kann die obige Aufgabe auch als Rechenaufgabe formulieren und rechnerisch lösen. Wie lautet die Rechenaufgabe und deren Ergebnis:

Aufgabe richtig formalisiert:

Rechnung formal korrekt durchgeführt:

8
7

In der gegebenen Aufgabe sollten die Probanden zum einen formal vorgegebene Brüche auf ikonischer Ebene veranschaulichen und addieren, zum anderen diese Addition auch auf eine formale Ebene übersetzen und hier lösen. Überzeugend ist und in diesem Fall die Lösungsquote im Aufgabenteil a. Jeder Proband konnte die Bruchteile veranschaulichen. Proband 9 fasste die Teilfrage b augenscheinlich falsch auf und beantwortete sie im Sinne einer topologischen Auffassung:

b) Welchen Teil des Kreises hast Du insgesamt gefärbt?

Antwort:

Den inneren Teil

Abbildung 63, Lösung Aufgabe 2b Proband 9

Andere nannten nur den blau gefärbten Teil (Proband 8) oder argumentierten über den Mengenaspekt (Proband 12, Ergebnis $\frac{2}{3}$). Zwei Probanden (6 und 11) übersetzten die ursprüngliche Additionsaufgabe in eine Subtraktionsaufgabe:

Aufgabe:	$\frac{1}{4}$ eines Kreises sind ungefärbt, wie viel Teile des Kreises sind gefärbt
Rechnung:	$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
Ergebnis:	$\frac{3}{4}$ eines Kreises sind ungefärbt

Abbildung 64, Lösung Aufgabe 2 Proband 6

Die jeweiligen Probanden sollen in dieser Aufgabe zeigen, dass sie nicht nur rein formal argumentieren, sondern auch auf verschiedenen Ebenen der Abstraktion arbeiten und zwischen diesen wechseln konnten. Das stückweise Füllen des Kreises sollte im Sinne einer Addition interpretiert werden. Zugelassen wurden zur Erstellung der Kontextmatrix nur vollständig richtige Lösungen. Dieser Anforderung genügten immerhin die Probanden 1, 2, 3, 5, 7, 13, 14 und 15.

3a) Im Kino wird ein Programm geboten, das aus einem Vorfilm (Dauer $\frac{1}{5}$ h), einem Werbeteil (Dauer $\frac{1}{20}$ h), Vorankündigungen (Dauer $\frac{1}{6}$ h) und dem Hauptfilm (Dauer $\frac{13}{12}$ h) besteht. Wie lange dauert das gesamte Programm.

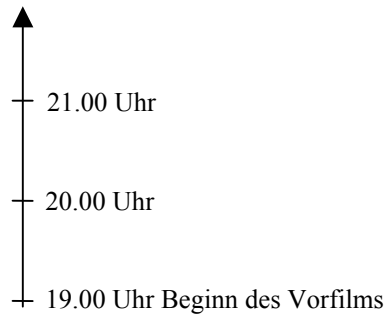
Richtig:

Mindestens einen Bruch falsch erweitert:

Rechenfehler innerhalb von \mathbb{N} :

6
3
2

3b) Der Vorfilm beginnt um 19.00 Uhr. Veranschauliche den Verlauf des Programms an folgender Zeitskala. Trage auch die jeweiligen Anfangszeiten ein:



Nur Gesamtdauer richtig (konsistent) angetragen: 2
Fast vollständig ($\geq 50\%$) richtig angetragen: 4
Nicht oder überwiegend falsch bearbeitet: 8

Aufgabenteil a erforderte es zu erkennen, dass es sich um die Addition von vier Brüchen handelt. Diese Addition musste richtig durchgeführt werden. Auch hier blieben etwaige Fehler nach richtiger Addition oder formale Unzulänglichkeiten unberücksichtigt. In Aufgabenteil b mussten die Probanden die Bruchgrößen auf Zeiteinheiten übertragen und an einem Zeitstrahl antragen. Der Anforderung genügen sollten Bearbeitungen, die sowohl richtige Additionen als auch zumindest die richtige Lokalisierung der Endzeit aufwiesen. Das gelang jedoch nur Proband 2. Richtig rechneten die Probanden 2,3,5,11,14 und 15. Fehler traten hauptsächlich beim Erweitern oder Kürzen (Probanden 1,4,6) und beim Rechnen in den natürlichen Zahlen (Probanden 8,12,13) auf. Der Aufgabenteil b blieb häufig unbearbeitet (Probanden 1,3,7,11 und 13).

4) Subtrahiere, kürze das Ergebnis vollständig und schreibe ggf. als gemischte Zahl.

a) $\frac{5}{7} - \frac{1}{7} =$ 14	b) $\frac{5}{8} - \frac{1}{3} =$ 10	c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$ 14	d) $5 - \frac{1}{3} =$ 13	e) $6 - \frac{1}{5} =$ 13
f) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} =$ 14	g) $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} =$ 14	h) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$ 14	i) $1 - \frac{7}{15} =$ 14	

Die Aufgabe stellt das Analogon bezüglich der Subtraktion zur Aufgabe 1 der Sammlung dar. Die Probanden sollen hier zeigen, dass sie unterschiedlich geartete Brüche voneinander abziehen können. Betrachtet man fehlerhafte Lösungen der Schüler, so fällt besonders Teilaufgabe b auf. Insgesamt 4 Probanden lösten sie fehlerhaft:

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{10}{16} - \frac{5}{16} = \frac{5}{16}$$

Abbildung 65, Aufgabe 4b Proband 4

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{15}{24} - \frac{8}{24} = \frac{7}{24} = \frac{7}{24}$$

Abbildung 66, Aufgabe 4b Proband 6

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{15}{27} - \frac{9}{27} = \frac{6}{27}$$

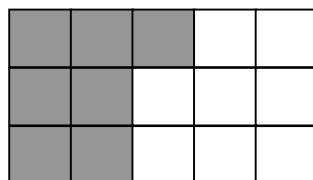
Abbildung 67, Aufgabe 4b Proband 7

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{15}{24} - \frac{8}{24} = \frac{7}{24} = \frac{7}{24}$$

Abbildung 68, Aufgabe 4b Proband 14

Proband 4 erweiterte den zweiten Bruch fehlerhaft. Der gefundene Hauptnenner ist dabei noch nicht einmal ein Vielfaches des vorgegebenen Nenners. Ähnliches führte Proband 7 für beide Brüche durch. Proband 6 verrechnete sich hingegen nur im Zähler des zweiten Bruchs. Im letzten Fall rechnete Proband 14 vorerst richtig, bildete dann jedoch fehlerhaft die Differenz⁶⁷ und kürzte im Anschluss falsch. Das Anforderungsprofil der Aufgabe 4 wird in Analogie zur ersten Aufgabe gestaltet. Alle (!) Probanden, außer Proband 1, lösten alle bis auf maximal eine Aufgabe richtig und entsprachen damit den Anforderungen. Die Massierung der Fehler auf den Teil b verwundert bei Kenntnis dieses Datums umso mehr. Die Probanden rechneten in der Nachbesprechung meist auf Anhieb die gleiche Aufgabe richtig. Es könnte sich unter Berücksichtigung der doch recht kleinen Population durchaus um einen sporadisch auftretenden und von der Aufgabe unabhängigen Fehler handeln.

5a) Von einer Schokolade wurden sieben Stücke gegessen (siehe Zeichnung). Welcher Bruchteil bleibt noch übrig?



Richtig:

Antwort 7/15:

8
4

b) Kannst Du die obige Aufgabe auch rechnerisch lösen?
Wie lautet die Rechenaufgabe?

Richtig formalisiert und gelöst:

Aufgabenteil nicht bearbeitet:

5
5

Eine Subtraktionsaufgabe, bei der von einer natürlichen Zahl ein Bruch abzuziehen ist, wurde, wie im Bruchrechnenunterricht durchaus üblich, kontextualisiert. Die Schüler sollen zum einen

⁶⁷ Es ist sowohl möglich, dass er sich verrechnete, als auch, dass er seine eigene Schrift nicht entziffern konnte (4 oder 7).

den übrig bleibenden Bruchteil erkennen, zum anderen dies in der Form formalisieren können, dass die ganze Schokolade durch eine 1 oder einen gleichwertigen Bruch dargestellt wird. Die häufigste Falschantwort war die Angabe des gegessenen (weggenommenen) Anteils. Das Anforderungsprofil gestaltet sich in Anlehnung an Aufgabe 2 so, dass die Probanden sowohl den richtigen Bruchteil, als auch die richtige Rechnung angeben mussten, um diesem zu genügen. Dies schafften nur 5 Probanden (1,2,5,6 und 11).

6) Wie lautet die Subtraktionsregel? Ergänze:

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man: _____

Vollständig richtig: 5

Nicht bearbeitet: 2

Ungleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man: _____

Vollständig richtig: 3

Nicht bearbeitet: 2

Wie unterscheiden sich diese Regeln von den Regeln zur Addition? : _____

Vollständig richtig: 9

Nicht bearbeitet: 4

Neben der Beherrschung des Additions- und Subtraktionsalgorithmus, sollen Schüler dieselben auch in eine sprachliche Form fassen können. Hierzu mussten sie sowohl die Fachtermini, als auch die Vorgehensweise selbst parat haben. Um nicht ausschließlich auswendig gelernte Sätze als Antworten zu erhalten, wurde zum einen mit der Regel zur Subtraktion begonnen, zum anderen wurde unterschieden zwischen gleichnamigen und ungleichnamigen Brüchen. Des Weiteren sollten die Probanden den Unterschied zwischen der Additions- und Subtraktionsregel formulieren. Da die Schüler an dieser Stelle Regeln in eigenen Worten schriftlich fassen sollten, wurden verschiedene Formulierungen zugelassen. Geachtet wurde sowohl auf die Richtigkeit der Aussage als auch auf deren Vollständigkeit. Im Sinne der Anforderungen war es somit nicht ausreichend, wenn nur der Zähler Erwähnung fand. Trotz der hohen Anzahl Probanden, die in Aufgabe 1 sicher vorgingen, waren es nur wenige, die tragbare Regeln lieferten. Zwei meiner Meinung nach hervorzuhebende fehlerhafte Schülerlösungen seien im Folgenden angeführt:

Wie lautet die Subtraktionsregel? Ergänze:

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man

Zähler und Nenner von einander zieht.

Abbildung 69, Aufgabe 6 Lösung Proband 5

Wie lautet die Subtraktionsregel? Ergänze:

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man

die Nenner subtrahiert

Abbildung 70, Aufgabe 6 Lösung Proband 6

Die Lösung von Proband 5 umschreibt verbal den Standardfehler bei der Subtraktion von Brüchen. Proband 6 verwechselt offensichtlich Zähler und Nenner eines Bruches. Vollständig richtige und somit vertretbare Aussagen wurden nur von den Probanden 1,11,13,14 und 15 aufgeschrieben.

7) Wurden die folgenden Rechnungen richtig ausgeführt? Kreuze an:

Aufgabe	Richtig	Falsch	Weiß nicht	
$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	12
$\frac{3}{15} + \frac{5}{8} = \frac{3}{3} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11
$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{2}{8} + \frac{12}{8} = \frac{2+12}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7
$\frac{13}{15} + \frac{6}{10} = \frac{13}{15} + \frac{3}{5} = \frac{13}{15} + \frac{9}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7
$\frac{16}{21} + \frac{1}{2} = \frac{16+1}{42} = \frac{17}{42}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11
$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10

Die jeweiligen Zahlen geben an, wie viele Probanden jeweils das richtige Feld ankreuzten. Aufgabe war es, Fehler in den Rechnungen aufzuspüren, ggf. anzumerken und das entsprechende Feld anzukreuzen. Dass dies nicht immer sinnvoll vorgenommen wurde, zeigt die folgende Schülerlösung:

Aufgabe	Richtig	Falsch
$\frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{3}{15} + \frac{5}{8} = \frac{3}{3} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{2}{8} + \frac{12}{8} = \frac{2+12}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{13}{15} + \frac{6}{10} = \frac{13}{15} + \frac{3}{5} = \frac{13}{15} + \frac{9}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{16}{21} + \frac{1}{2} = \frac{16+1}{42} = \frac{17}{42}$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Abbildung 71, Lösung Aufgabe 7 von Proband 9

Der Schüler umkreist (im Original sogar in verschiedenen Farben) jeweils die Zeilenanfänge, ohne die Fehler konkreter zu lokalisieren. Im Nachgespräch stellte sich heraus, dass die Aufgaben für den Probanden alle falsch aussahen, er also rein nach Gefühl entschieden hat. Einen systematischeren Umgang mit dieser Aufgabe zeigte Proband 11:

$$\frac{13}{15} + \frac{6}{10} = \frac{13}{15} + \frac{2}{5} = \frac{13}{15} + \frac{6}{15} = \frac{19}{15}$$

Er versucht das Ergebnis nachzuvollziehen, kommt jedoch aufgrund eines Rechenfehlers zu einem falschen Schluss. In der Lösung zeigt sich, wie stringent die Regel zur Addition von Brüchen von dem Probanden angewandt wurde. Die Alternativlösung wurde nicht als solche er- bzw. anerkannt. Um die Wahrscheinlichkeit dafür, dass lediglich geraten wird, gering zu halten, wurde das zusätzliche Feld „Weiß nicht“ zur Wahl gestellt. Trotzdem konnte dieser Fall nicht ausgeschlossen werden. Aufgrund der geringen Itemanzahl wurden nur vollständig richtige Lösungen akzeptiert⁶⁸. Eine solche brachte nur Proband 13. Auffällig sind die niedrigen Lösungsquoten beim dritten und vierten Item. Ein möglicher Grund für das fehlerhafte Lösen von Item vier wurde bereits angeführt. Dass Schüler durchaus regelmäßig, wie beim dritten Item angeboten, Addition und Subtraktion verwechseln, zeigt auch die folgende Aufgabe.

a) $\frac{5}{3} - \frac{1}{6} =$ 12

Während in den Aufgaben 1 und 4 lediglich Brüche addiert bzw. subtrahiert werden mussten, wurden diese beiden Aufgaben ähnlichen Typs den Schülern zusammen in einer Aufgabe gestellt. Dass nun andere Anforderungen an die Probanden gestellt wurden, zeigen nicht zuletzt die Lösungen der Probanden 14 und 15:

Abbildung 73, Lösung Aufgabe 8 von Proband 14

b) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Beide gehen dazu über, die ursprüngliche Additionsaufgabe in eine Subtraktionsaufgabe umzuwandeln. Im zweiten Fall wurde das Minus durch einen Doppelstrich ersetzt. Die Diskussion möglicher Erklärungen für dieses Vorgehen unterbleibt, da auch der Proband selbst seine Lösung im Anschluss an deren Erstellung nicht mehr nachvollziehen konnte. Beide Schüler gaben als Ergebnis der für sie in dieser Form nicht lösbaren Aufgabe $\frac{1}{6}$, also den Betrag der konsistenten Lösung aus \mathbb{Q} , an. Weitere Fehlerquellen fanden sich im Erweitern oder Kürzen von Brüchen aber auch dem Vermischen verschiedener Grundrechenarten:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{5}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = 1 \frac{3}{6} = 1 \frac{1}{2} \\ \text{b) } \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = 1 \frac{3}{6} = 1 \frac{1}{2} \end{array}$$

Abbildung 75, Lösung Aufgabe 8 von Proband 6

$$\text{b) } \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{20}{6} \stackrel{(\cdot 2)}{=} \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$$

Abbildung 76, Lösung Aufgabe 8 von Proband 8

Während das erste Beispiel lediglich auf fehlerhaftes Kürzen des Ergebnisses zurückgeführt werden kann, findet im zweiten Fall eine Vermengung von Additions- und Multiplikationsregel statt, die so in den vorhergehenden Aufgaben nicht diagnostiziert werden konnte. Akzeptiert wurden nur solche Lösungen, die vollständig richtige Ergebnisse enthielten. Da jedoch die Fähigkeit geprüft werden sollte, zwischen den beiden Rechenarten zu kontrastieren, wurden Lösungen wie die von Proband 6 ebenfalls akzeptiert. Hier wurde das richtige Endergebnis lediglich nachträglich in eine falsche Form gebracht. Der jeweilige Rest der Rechnungen bleibt in diesem Fall unberücksichtigt. Den Anforderungen genügende Lösungen konnten von allen Probanden außer 8, 14 und 15 erbracht werden.

9a) Welche Zahl ist um $\frac{1}{20}$ größer als die Summe aus $\frac{7}{10}$ und $\frac{1}{5}$?

b) Welche Zahl muss zu $\frac{7}{8}$ addiert werden, um 1 zu erhalten?

c) Ein LKW ist $7\frac{3}{4}$ m lang und hat einen Anhänger von $6\frac{1}{5}$ m Länge. Wie lang ist der Lastzug insgesamt?

4
6
4

Neben reinen Rechenaufgaben sind in vielen Schulbüchern auch Textaufgaben zu finden, die durchaus zum üblichen Umfang des Mathematikunterrichts in der Unter- und Mittelstufe gehören. Exemplarisch wurden drei ausgewählt. In Aufgabenteil a musste der Schüler erkennen, dass die Addition zweier und die anschließende Subtraktion einer Zahl verlangt wurde. Hierzu musste er das Wort Summe kennen und deuten. Aufgabenteil b ist das formale Analogon zu Aufgabe 5. Die Aufgabe konnte sowohl rechnerisch als auch schlicht durch Anschauung gelöst werden. Bei der letzten Teilaufgabe handelt es sich um eine kontextualisierte Aufgabe zur Addition zweier gemischter Zahlen. Den Aufgaben ist gemein, dass sie sowohl die Interpretation eines vorgegebenen Textes als auch deren rechnerische Umsetzungen erfordern. Das Textverständnis ist dabei notwendige, die rechnerische Umsetzung hinreichende Bedingung zur erfolgreichen Bearbeitung dieser Aufgabe. Dass einige Probanden es nicht schafften, den Text zu hinterfragen, zeigt z.B. die folgende Bemerkung von Proband 14:

a) Welche Zahl ist um $\frac{1}{20}$ größer als die

? hatten wir nicht

Abbildung 77, Anmerkung Proband 14 zu Aufgabe 9

Dem Schüler bekannte unterrichtliche Kontexte werden als Begründung für die fehlende Bearbeitung dieser Teilaufgabe herangezogen. Auch in der Nachbesprechung konnte der Proband zu dieser Aufgabe keine näheren spezifischen Fragen formulieren. Den Versuch, im Unterricht erlernte Schemata anzuwenden, unternahm Proband 1 beim zweiten Aufgabenteil:

b) Welche Zahl muss zu $\frac{7}{8}$ addiert werden, um 1 zu erhalten?

$$\begin{array}{l} x + \frac{7}{8} = 1 \\ \frac{1}{1} - \frac{7}{8} = \end{array}$$

Abbildung 78, Lösung Aufgabe 9 von Proband 1

Der Schüler stellte eine Gleichung auf, die der Aufgabenstellung genügt. Beim Versuch, die Gleichung umzuformen, wurde jedoch der Kehrwert eines Bruchs gebildet, was der Situation natürlich nicht angemessen war. Es stellte sich heraus, dass im Unterricht einfache Umformungen linearer Gleichungen thematisiert wurden. Die Schülerlösung kann aus diesem Grund als eine Vermischung von Subtraktion und Division angesehen werden. Ein Ergebnis konnte der Proband aufgrund des so entstandenen Terms nicht angeben.

Inwiefern es üblich ist, dass Schüler Kontexte nutzen, um die Plausibilität ihrer Ergebnisse abzuschätzen, zeigt folgendes Beispiel:

c) Ein LKW ist $7\frac{3}{4}$

Lastzug insgesamt

62 m

Abbildung 79, Lösung Aufgabe 9 von Proband 9

Vom berechneten Bruch wurde lediglich der Zähler berücksichtigt. Die so entstandene nicht tragbare Lösung wurde jedoch ohne weitere Korrekturen vom Probanden akzeptiert. Interessant ist auch die nachfolgende Schülerlösung:

c) Ein LKW ist $7\frac{3}{4}$ m lang und hat einen Anhänger von $6\frac{1}{5}$ m Länge. Wie lang ist der

Lastzug insgesamt?

$13\frac{4}{9}$

Abbildung 80, Lösung Aufgabe 9 von Proband 7

Der zuerst unscheinbare Rechenfehler ist eine Übertragung der Fehlerstrategie $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ auf den Fall $\alpha\frac{a}{b} + \beta\frac{c}{d} = (\alpha + \beta)\frac{a+c}{b+d}$. Hervorzuheben ist dabei, dass dies die einzige Stelle ist, an der der Schüler diese Strategie anwandte. Um mit den Mindestanforderungen dem ursprünglichen Ziel gerecht zu werden, wurden nur solche Lösungen akzeptiert, die mindestens zwei vollständig richtige Teilaufgaben aufwiesen. Dies konnte nur von den Probanden 1, 4, 6, 11 und 13 geleistet werden.

10) Berechne jeweils:

a) $\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{18} = \boxed{13}$ b) $3 - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) = \boxed{12}$

Als formal anspruchsvoller gestalten sich mögliche Lösungen von Aufgabe 10. Auch in diesem Fall wurden verschiedene Rechenarten kombiniert. Zusätzlich mussten die Probanden das Rechnen mit Klammern beherrschen und anwenden können. Ähnlich wie in vorhergehenden Aufgaben konnte auch hier die Vermengung von Addition und Subtraktion beobachtet werden:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{18} &= \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{6}\right) - \frac{5}{18} = \frac{5}{9} - \frac{5}{18} = \frac{10}{18} - \frac{5}{18} \\ &= \frac{5}{18} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Abbildung 81, Lösung Aufgabe 10 von Proband 13

Die Rechnung erfolgte richtig bis zur eigentlichen Durchführung der Subtraktion. Hier wurde dann schlicht addiert. Den Anforderungen genügen sollten Schülerlösungen, die richtige Lösungszahlen beinhalten. Gewertet wurde nur die vollständige Lösung beider Teilaufgaben. Das gelang mit Ausnahme von den Probanden 1 und 13 allen Probanden.

11) Setze für x und y je eine natürliche Zahl (1, 2, 3,) ein, so dass eine wahre Aussage entsteht:

a) $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$ $\boxed{8}$ b) $\frac{3}{5} + \frac{x}{y} = \frac{9}{10}$ $\boxed{9}$

Ebenfalls formal geprägt ist die letzte Aufgabe der Sammlung. Die Schüler mussten die Variablen x und y als Platzhalter erkennen und entsprechend mögliche Zahlen angeben. Viele lieferten hierzu akzeptable Lösungen. Obwohl sie nicht ganz der Aufgabenstellung genügt, zeigt die folgende Schülerlösung durchaus, dass Verständnis für das eigentliche Problem vorhanden war:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x}{5} + \frac{y}{5} &= 1 \\ x &= 5 \quad y = 5 \end{aligned}$$

Abbildung 82, Lösung Aufgabe 11 von Proband 11

Der Proband erkannte, dass das zuerst angegebene Lösungspaar 5 und 5 auf die Lösung zwei führte⁶⁹. Er berichtet dies, indem er die Zahlen jeweils halbiert. Dabei handelt es sich natürlich nicht mehr um natürliche Zahlen. Der klassische Fehler im Bereich der Addition von Brüchen konnte auch bei Proband 15 im Rahmen dieser Aufgabe gefunden werden:

⁶⁹ Dieser Fehler taucht insgesamt dreimal auf und ist konsistent mit dem üblichen Fehler im Bereich der Addition von Brüchen.

$$\frac{3}{5} + \frac{x}{y} = \frac{9}{10}$$

x= 6

y= 5

Abbildung 83, Lösung Aufgabe 11 von Proband 15

Zähler und Nenner ergeben jeweils separat addiert den geforderten Bruch. Dass die Probanden in geeigneter Weise mit Platzhaltern bzw. Variablen umgehen konnten wurde aus meiner Sicht gezeigt, wenn es ihnen gelang, für beide Aufgaben jeweils mindestens ein richtiges Zahlenpaar anzugeben. Das schafften die Probanden 2, 3, 4, 8, 9 und 11. Es ergab sich so aus der Gesamtheit der Aufgaben untenstehende Kontextmatrix:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D01		X			X	X		X	X		
D02	X	X	X	X	X			X		X	X
D03	X	X		X				X		X	X
D04	X			X				X	X	X	X
D05	X	X		X	X			X		X	
D06	X			X	X			X	X	X	
D07	X	X		X				X		X	
D08	X			X						X	X
D09	X			X				X		X	X
D11	X			X	X	X		X	X	X	X
D12	X			X				X		X	
D13	X	X		X		X	X	X	X		X
D14	X	X		X		X				X	
D15	X	X		X		X				X	

Tabelle 24, Kontextmatrix Aufgabensammlung

Um eine übersichtliche individuelle Interpretationsbasis zu erhalten, wurden die Aufgaben in zwei Gruppen aufgeteilt. Gruppe 1 besteht aus den Aufgaben 1, 4, 6, 8 und 10 und repräsentiert Aufgaben, deren Lösung eher algorithmischer oder reproduktiver Fähigkeiten bedürfen:

Aufgabe	Inhalt
1	Addition von zwei Zahlen
4	Subtraktion von zwei Zahlen
6	Formulierung von Subtraktions- bzw. Additionsregel
8	Addition und Subtraktion von Brüchen
10	Rechnen mit Klammern

Tabelle 25, Aufgabengruppe 1

Die restlichen Aufgaben wurden der zweiten Gruppe zugeordnet und repräsentieren Verständnisaufgaben:

Aufgabe	Inhalt
2	Addition auf ikonischer und formaler Ebene
3	Addition aus Textaufgabe und Veranschaulichung Strahl
5	Subtraktion auf ikonischer und formaler Ebene
7	Auffinden verschiedener Fehler in gegebenen Rechnungen
9	Umsetzungen von Texten in Rechnungen
11	Umgang mit Platzhaltern beim Rechnen mit Brüchen

Tabelle 26, Aufgabengruppe 2

Zu Aufgabengruppe 1 ergibt sich folgender Begriffsverband:

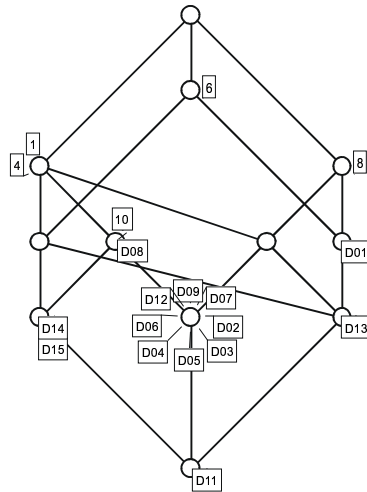


Abbildung 84, Begriffsverband Aufgabengruppe 1

Auffallend ist die Anhäufung von Probanden, die einem Begriff zugeordnet wurden. **Bis auf die Formulierung der Regel** konnten diese Schüler **alle Aufgaben** dieser Aufgabengruppe lösen. Die Platzierung von Proband 1 fällt ebenfalls auf. Betrachtet man seine Ausarbeitungen nochmals näher, so stellt man fest, dass diese Platzierung fast ausschließlich durch Einbettungsfehler der natürlichen Zahlen in die Menge der Brüche verursacht wurde.

Der Begriffsverband für die zweite Aufgabengruppe ergibt sich entsprechend:

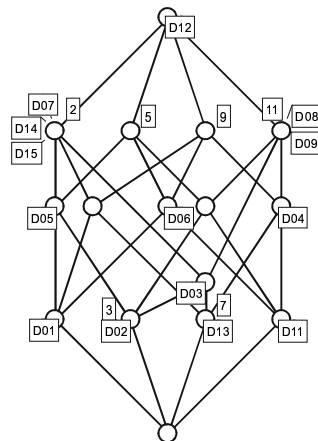


Abbildung 85, Begriffsverband Aufgabengruppe 2

Die höhere Komplexität dieses Begriffsverbandes ist im Vergleich zum Vorhergehenden augenscheinlich. Im unteren Bereich sind viele Begriffe zu finden, denen lediglich ein Proband zugeordnet ist. Auf Erläuterungen zu allen Probanden wird aufgrund der hohen Komplexität verzichtet. Hervorgehoben werden sollen lediglich die Probanden 7, 14, 15 und 8, 9. Ihnen sind jeweils identischen Begriffen im oberen Bereich zugeordnet, was bedeutet, dass sie nur einen kleinen Teil dieser Aufgabengruppe adäquat lösen konnten (Entweder Aufgabe 2 oder 11).

Zur Auswertung der Inzidenzmatrix aus Tabelle 24 wurde die formale Begriffsanalyse herangezogen. Die Analyse der gesamten Matrix mit dieser Methode scheint aufgrund der Komplexität des dann entstehenden Begriffsverbandes nicht sinnvoll. Um jedoch eine Klassifizierung der Aufgaben vornehmen zu können, die nicht a priori aufgrund vermuteter, sondern aufgrund beobachteter Strukturen zustande kommt, werden abschließend Zusammenhänge innerhalb der Aufgaben mit multivariaten Verfahren näher untersucht. Hierzu muss ein geeignetes Unähnlichkeitsmaß B gewählt werden. Sei dazu $x_p^1, x_p^2, \dots, x_p^i, \dots, x_p^j$ Vermerk beim p -ten Probanden bei den jeweiligen Aufgaben. Im allgemeinen Fall können dies positive reelle Zahlen sein, in unserem Fall reicht jedoch, da lediglich eine Inzidenzmatrix analysiert werden soll, die Beschränkung auf Nullen und Einsen, also auf eine dichotome Bewertung, aus (Proband genügte den Anforderungen der Aufgabe nicht $\hat{=}$ 0; die 1 wird durch das Komplement festgelegt). Dazu wird zunächst davon ausgegangen, dass keine der Aufgaben einer besonderen Gewichtung bedarf, jede Aufgabe also den anderen gleichgestellt ist. Da B eine Funktion in Abhängigkeit von den Probandenlösungen sein soll bedeutet das, dass B invariant gegenüber komponentenweiser Permutationen sein muss. Des Weiteren soll B so gewählt werden, dass abweichende Merkmale (in diesem Fall Probandenlösungen) den Abstand vergrößern und übereinstimmende einen möglichst kleinen Abstand implizieren. Betrachtet werden die beiden Tupel $\mathfrak{X}_1 = (x_{p_1}^1, x_{p_2}^1, \dots, x_{p_U}^1)$ und $\mathfrak{X}_2 = (x_{p_1}^2, x_{p_2}^2, \dots, x_{p_U}^2)$, die jeweilige Vermerke über Schülerlösungen aufgabenbezogen enthalten. Bis auf ordinale Transformationen ist die City-Block-Metrik das eindeutig bestimmte Distanzmaß, das diese Forderungen erfüllt und wird aufgrund der inhaltlichen Interpretierbarkeit⁷⁰ ohne weitere Transformationen für B verwandt. Wir setzen also:

$$B(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = \sum_{i=1}^U |x_{p_i}^1 - x_{p_i}^2|$$

Wegen der ordinalen Signifikanz von B wenden wir auch hier Verfahren der nicht metrischen MDS und den Complete-Linkage Algorithmus an. Die City-Block-Metrik bedeutet eine gewisse Vereinfachung, da bis auf die in Abschnitt 6.5.4 entwickelten Stressmaße alle notwendigen Algorithmen in SPSS implementiert sind. Es ergibt sich folgende Distanzmatrix:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
A1	,										
A2	7	,									
A3	12	7	,								
A4	0	7	12	,							
A5	10	7	4	10	,						
A6	10	5	6	10	6	,					
A7	12	7	2	12	6	4	,				
A8	4	7	10	4	6	10	10	,			
A9	10	9	6	10	4	4	4	6	,		
A10	1	8	11	1	9	11	13	5	11	,	
A11	6	9	6	6	8	8	6	6	6	7	,

Tabelle 27, Distanzmatrix Aufgaben

mit zugehöriger Matrix der Rangordnungen:

⁷⁰ Der Abstand zweier Aufgaben ist dann die Anzahl der Nichtübereinstimmungen der Inzidenzmatrix

Tabelle 28, Rangordnung der Distanzen

Dendrogram using Complete Linkage



Zuordnungsübersicht

Tabelle 29, Informationen zum Dendrogramm

161

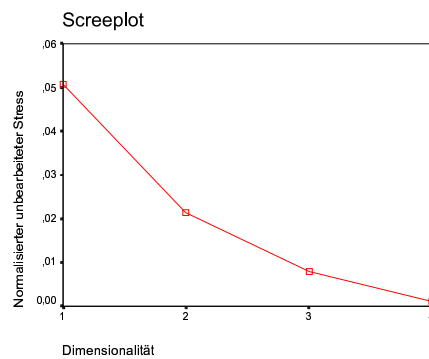


Abbildung 87, Screplot des Stresses Nachtest

Nach dem Screplot spricht einiges für die Wahl einer zwei- oder dreidimensionalen Lösung. Aufgrund der besseren Interpretationsbasis wird nun die zweidimensionale Lösung durchgerechnet und vorgestellt. Das Programm Proxscal wies den einzelnen Aufgaben Repräsentanten in der Ebene zu. Der Algorithmus ergab untenstehende Platzierungen:

Endgültige Koordinaten

Dimensionalität: 2

	Dimension	
	1	2
A1	,799	,084
A2	,044	-,037
A3	-,647	,369
A4	,799	,084
A5	-,278	-,427
A6	-,763	-,095
A7	-,690	,293
A8	,470	-,452
A9	-,549	-,364
A10	,766	,143
A11	,050	,402

Tabelle 30, Koordinaten der MDS-Lösung

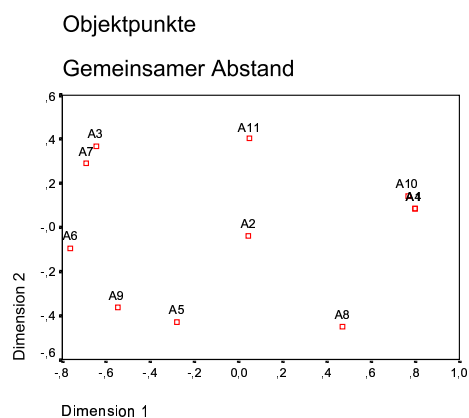


Tabelle 31, Diagramm der MDS-Lösung des Nachtests

Um den in Kapitel 6 entwickelten Stress zu berechnen, werden die Abstände der durch Proxscal ermittelten Lösung benötigt:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11
A1	0,000										
A2	0,765	0,000									
A3	1,473	0,801	0,000								
A4	0,000	0,765	1,473	0,000							
A5	1,192	0,506	0,878	1,192	0,000						
A6	1,572	0,809	0,478	1,572	0,588	0,000					
A7	1,503	0,804	0,088	1,503	0,829	0,394	0,000				
A8	0,629	0,596	1,387	0,629	0,749	1,284	1,379	0,000			
A9	1,420	0,677	0,740	1,420	0,278	0,345	0,672	1,023	0,000		
A10	0,067	0,745	1,431	0,067	1,190	1,548	1,464	0,664	1,409	0,000	
A11	0,813	0,439	0,698	0,813	0,892	0,953	0,749	0,952	0,973	0,762	0,000

Tabelle 32, Distanzen der zweidimensionalen Proxscal Lösung

Und entsprechend die zugehörigen Ränge:

0
22 0
43 23 0
1 22 43 0
35 9 28 35 0
46 25 8 46 10 0
44 24 3 44 27 6 0
12 11 38 12 20 36 37 0
40 15 17 40 4 5 14 33 0
2 18 41 2 34 45 42 13 39 0
26 7 16 26 29 31 19 30 32 21 0

Tabelle 33, Rangordnung der Abstände der Proxscal-Lösung

Der Stress 1 nach Kruskal beträgt 0,1868, die Kennzahlen gemäß Abschnitt 6.5.4 errechnen sich zu:

$$S_{\text{SMO}}^3(d, \partial) = 3197 ; S_{\text{MO}}^3(d, \partial) = 3197 ; N = 32676$$

und somit:

$$S_{\text{SMO}}^4(d, \partial) = \frac{3197}{32676} \approx 0,1 \approx \frac{3197}{32676} = S_{\text{MO}}^4(d, \partial).$$

Abschließend das Shepard-Diagramm der analysierten Daten:

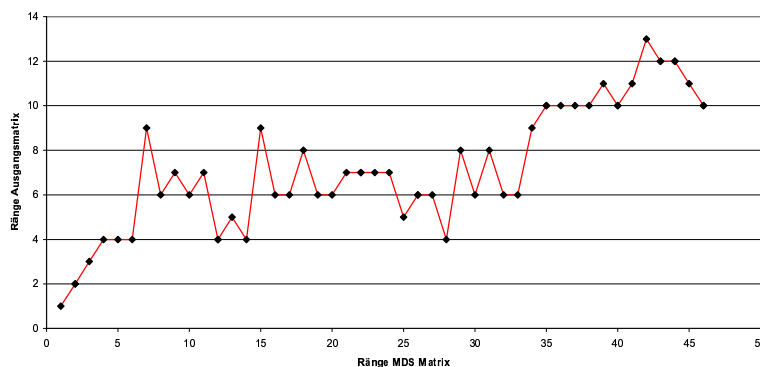


Abbildung 88, Shepard Diagramm zum Nachtest

Betrachtet man die Vorabgruppierung aus Tabelle 25 und Tabelle 26 nochmals unter Berücksichtigung der in Abbildung 86 nahegelegten Gruppierung, so fällt auf, dass bei Auswahl der Zweicluster Lösung lediglich Aufgabe 6 nicht der Vorabschätzung genügt. Das Formulieren von Regeln scheint in Bezug auf die Probandengruppe wenig mit dem

algorithmischen Aspekt bei der Addition gemein zu haben. Probanden, die mit Brüchen, wie sie zum Beispiel in den Aufgaben 1, 4, 10 und 8 gegeben waren, rechnen können, müssen nicht unbedingt eine tragfähige Regel aufgeschrieben haben. Es ist sogar so, dass Proband 1 mehrere Fehler bei den Aufgaben 1 und 4 machte, jedoch die Formulierung der Regel gelang. Diese Unabhängig- bzw. Widersprüchlichkeit von sprachlicher und algorithmischer Sichtweise des Additions-, bzw. Subtraktionsalgorithmus zeigt sich auch im Diagramm der MDS. Eine Dimension kann auch entsprechend interpretiert werden:

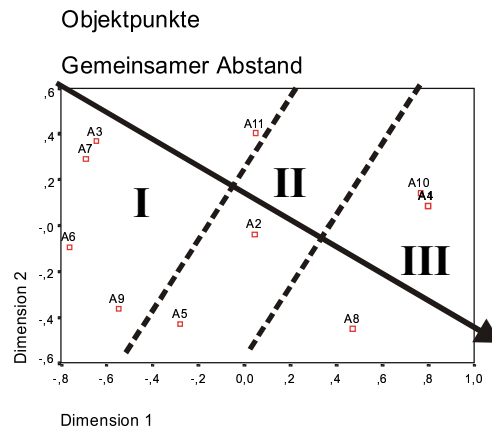


Abbildung 89, in Bereiche eingeteiltes Diagramm der MDS

Im Bereich I sind Aufgaben angesiedelt, bei denen der Schüler mathematische oder umgangssprachliche Texte analysieren und bewerten musste. Unter mathematischen Texten werden dabei z.B. Rechnungen (wie bei Aufgabe 7) oder das Rechnen mit Platzhaltern (wie bei Aufgabe 11) verstanden. Diese Aufgaben enthalten, ähnlich wie sprachliche Texte, Informationen, die vom Schüler abgewogen und beurteilt werden müssen. Die besondere Position von Aufgabe 6 weist darauf hin, dass die Fertigkeiten derartige Texte zu analysieren, durchaus vergleichbar sind mit denen, Texte zu formulieren. Man kann auch davon sprechen, dass die Schüler algorithmisieren, also ihr eigenes Handeln aus einer Metaebene reflektieren müssen. Im Bereich I genügten jeweils 1-7 Probanden den Anforderungen. Im Bereich II des Diagramms finden sich Aufgaben, bei denen die Schüler mit Repräsentanten umgehen mussten. Es wurde verlangt, dass sie es schaffen, von der Anschauungsebene auf die formale Ebene zu wechseln. Zwar spielen auch hier Texte eine Rolle, primär standen jedoch entsprechende Skizzen im Vordergrund. 5-8 Probanden konnten den Anforderungen genügen, woraus folgt, dass Aufgaben aus diesem Bereich den Schülern nicht mehr so schwer fielen wie die aus Bereich I. Im Bereich III finden sich schließlich Aufgaben, bei denen fast nach „Schema F“ verfahren werden konnte. Lediglich das Beherrschen des Additions- und Subtraktionsalgorithmus und einige Feinheiten im Umgang mit Brüchen reichten aus, um hier erfolgreich vorzugehen. Das gelang im Bereich dieser Aufgaben auch 10-13 Probanden. Der Schwierigkeitsgrad für die beobachteten Probanden nimmt also von Bereich I bis Bereich III stetig ab. Fasst man dieses aus meiner Sicht bedenkenswerte Ergebnis mit den vorhergehenden Indizien zusammen, so kann in Bezug auf die Probandengruppe und den Nachtest folgendes festgehalten werden:

- Die Probanden weisen im Bereich der Aufgaben aus Aufgabengruppe 1 eine hohe Homogenität auf. Klammert man, wie es die Analyse der Daten mit Hilfe der

Clusteranalyse nahelegt, Aufgabe 6 zusätzlich noch aus, so kann man davon sprechen, dass die Aufgaben 1, 4, 8 und 10 von den Probanden größtenteils den Anforderungen entsprechend gelöst wurden. In Bezug auf die Aufgaben 1, 4 kann sogar davon gesprochen werden, dass Schüler sie sicher lösen. Die meisten Probanden konnten somit Aufgaben, die algorithmische Fähigkeiten verlangten, mit hinreichender Güte lösen.

- Die Schülerlösungen variieren stark im Bereich der Aufgaben aus Aufgabengruppe II und Aufgabe 6. Die Heterogenität der Lösungen wird durch den Begriffsverband aus Abbildung 85 zum Ausdruck gebracht. Hier gibt es nur wenige Begriffe, denen mehrere Probandenbeschriftungen zugeordnet wurden. Die Aufgaben scheinen für die Schüler schwerer zu sein, als die aus Aufgabengruppe 1 ohne Aufgabe 6, d.h. die Lösungsquoten bleiben hinter denen der anderen Aufgaben zurück. In Bezug auf die Probandengruppe kann gesagt werden, dass sie weder text- noch anschauungsbezogene Aufgaben sicher lösen konnten, wobei diese beiden Bereiche sich nochmals voneinander unterscheiden (vgl. Ausführungen zur MDS).
- Analysiert man die Aufgaben in Hinblick auf ihre Ähnlichkeit durch Rückgriff auf die Schülerlösungen, so zerfällt die Sammlung in zwei Gruppen, nämlich Gruppe 1 (Aufgaben 1, 4, 10 und 8) und Gruppe 2 (Aufgaben 2, 6, 5, 9, 3, 7 und 11). Die Aufgaben aus Gruppe 1 konnten von den meisten Schülern sicher bearbeitet werden, die aus Gruppe 2 nicht. Die Cluster des Dendrogramms aus Abbildung 86 können aus diesem Grund interpretiert werden als „für Schüler gut lösbare“ (Gruppe 1) und „für Schüler nicht gut lösbare“ (Gruppe 2) Aufgaben der Sammlung. Der Bereich III des MDS-Diagramms korrespondiert dabei mit dem Cluster der Aufgaben der Gruppe 1.
- Die Fehler der Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben sind vielfältig und aus meiner Sicht hier nicht sinnvoll typisierbar. Das Spektrum der Fehler reicht von einfachen Rechenfehlern innerhalb der natürlichen Zahlen bis zu systematischen Schülerfehlern. Auch der konsequente Umgang mit Rechenzeichen ist nicht voraussetzbar, Addition und Subtraktion werden durchaus häufig miteinander verwechselt. Es kann also nicht davon gesprochen werden, dass sich die Fehler auf einige wenige Muster beschränken, die bei vielen Probanden zu beobachten sind. Das bedeutet aber auch, dass in Bezug auf die betrachteten Probanden der **vorher diagnostizierte Fehler nicht mehr** oder nur noch sporadisch wiedergefunden werden kann. Die Addition und Subtraktion wird von **keinem** der Probanden mehr in systematischer Weise gemäß des Standardfehlers durchgeführt.

Diese Ergebnisse werden im Weiteren zur probandenspezifischen Charakterisierung verwandt. Der Nachtest sollte zeigen, ob bei Schülern diagnostizierte Defizite durch den unterstützenden Umgang mit einem Programm zur Bruchrechnung behoben werden konnten. Dies zu prüfen leisteten Aufgaben, die schlicht die Anwendung des Additions- bzw. Subtraktionsalgorithmus testen. Die Überprüfung der Behebung der Defizite fand dann auf gleichem Niveau wie deren Diagnose statt. Auf Verständnis konnte dieser Fehler nicht geprüft werden, da auf ikonischer Ebene die Fehlvorstellung nur schwer konstruierbar ist. Des Weiteren sollte der Nachtest aufzeigen, inwieweit Schüler Flexibilität und Tiefe bei ihrem Bruchrechenverständnis entwickelt haben. Um mögliche Zusammenhänge zu vorhergehenden Analysen aufzuzeigen, bedarf es einer spezielleren Betrachtung, wie sie in Abschnitt 8.6 vorgenommen wird.

8.5 Einschätzungen und Meinungen der Schüler

Nach der Durchführung der Probandensitzungen und den jeweiligen Tests wurde versucht, mit den Schülern gezielt ins Gespräch zu kommen und Meinungen zu sammeln. Unterstützt werden sollte die Kommunikation durch die Vorgabe von Fragen, welche Einschätzungen zum Programm oder auch Gewohnheiten der Schüler in die Diskussion einbringen sollten. Die Fragen wurden hierzu in zwei Fragenblöcke eingeteilt. Der erste Block beschäftigte sich im Wesentlichen mit Beurteilungen zum Programm:

- Wie fandest du das Programm insgesamt (F1)
- Beurteile die Bedienungsfreundlichkeit (F2)
- Beurteile den graphischen Aufbau (F3)
- Beurteile die Verständlichkeit (F4)
- Beurteile den Schwierigkeitsgrad (F5)

Frage F1 zielt darauf ab, eine spontane Gesamteinschätzung seitens des Probanden zu erhalten. Die Fragen F2 bis F4 gehen etwas weiter ins Detail. Die jeweilig verwandten Bezeichnungen wurden den Probanden erläutert und beispielhaft nähergebracht. Den Schwierigkeitsgrad konnten die Probanden mit der Frage F5 beurteilen. Um wirklich detailliert über einzelne Aspekte diskutieren zu können, wäre eine ausführliche schriftliche Eigenformulierung durchaus sinnvoll gewesen. Neben der Tatsache, dass den Schülern, unter denen auch ausländische Kinder waren, dann eine weitere Fähigkeit abverlangt worden wäre, schien es im Rahmen der zweiten Sitzung nicht zumutbar eine weitere umfangreiche Aufgabe bearbeiten zu lassen. Ich habe mich letztendlich dafür entschieden, den Schülern eine fünfstufige Ratingskala vorzugeben, auf welcher sie einzelne Einschätzungen einordnen konnten. 1 war dabei als hervorragend oder als sehr gut zu gewichten, 5 als unzureichend oder mangelhaft. Bei Frage 5 des ersten Blockes bedeutete die 1, dass die Fragen des Programms zu leicht, die 5, dass die Fragen des Programms zu schwer waren. Den Probanden wurden die Fragen ausführlich erläutert und hinreichend Zeit zu Äußerungen gelassen. Es zeichnete sich jedoch relativ schnell ab, dass die Meinungsbilder von vielen unterschiedlichen Kriterien geprägt waren, so dass eine Sammlung und Systematisierung der Meinungen nicht sinnvoll erschien. Um trotzdem einen Überblick über das Ergebnis zu geben, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass die Probanden eine Frage positiv gewichten, wenn sie die 1 oder 2 der Skala wählten, eine entsprechend negative Gewichtung gilt für die Zahlen 3-5. Diese Einteilung unterliegt natürlich einer gewissen Willkür und soll auch nicht über individuell möglicherweise unterschiedliche mit den Werten 1 bis 5 verbundene und unter Umständen fragenabhängige Beurteilungen hinwegtäuschen. Ich glaube jedoch schon, dass die Assoziation der Zahlen 1 und 2 mit den üblichen Notenstufen bei den Schülern eher positive Gewichtungen impliziert. Mit dem folgenden Begriffsverband muss entsprechend dieser Vorbemerkungen sensibel verfahren werden:

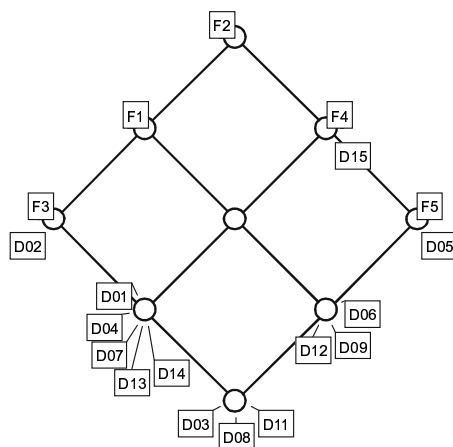


Abbildung 90, Begriffsverband Probanden Fragebogen Teil 1

Es zeichnen sich im Wesentlichen drei Gruppen ab. Die Probanden 1, 4, 7, 13 und 14 empfanden die Aufgaben des Programms nicht als besonders leicht. Alle anderen Eigenschaften wurden positiv beurteilt. Dem graphischen Aufbau des Programms nicht zustimmen konnten die Probanden 6, 9 und 12, die alle einem Begriff zugeordnet wurden. Sie fanden die Aufgaben leicht und gewichteten alle anderen Eigenschaften positiv. Alle Beurteilungen im zustimmenden Bereich wurden von den Probanden 3, 8 und 11 vorgenommen. Die Selektionen von den restlichen Probanden sind dem Begriffsverband zu entnehmen. Der zweite Fragenblock des Fragebogens gestaltete sich wie folgt:

- Würdest du, falls du Probleme in Mathe bekommst, ein Lernprogramm einsetzen? (F1)
- Würdest du, falls du Probleme in Mathe bekommst, Nachhilfe nehmen? (F2)
- Würdest du ein Lernprogramm der Nachhilfe vorziehen? (F3)
- Lernst du mit Freunden für Klassenarbeiten? (F4)
- Lernst du mit Familienmitgliedern für Klassenarbeiten? (F5)
- Würdest du ein Lernprogramm zum Lernen bevorzugen? (F6)
- Falls das getestete Programm im Unterricht eingesetzt werden würde, würdest du das Lernen mit dem Programm dem herkömmlichen Lösen von Übungsaufgaben vorziehen? (F7)

Die Fragen F1 und F2 hinterfragen, inwiefern der Proband überhaupt bereit ist, vermarktete Hilfen⁷¹ in Anspruch zu nehmen. Welche Methode ihm lieber wäre, soll die Frage F3 klären. Die Gewohnheiten, mit Freunden oder Familienmitgliedern für Klassenarbeiten zu lernen, werden durch F4 und F5 erfragt. Entsprechend versucht F6 herauszufinden, wie Lernprogramme bei den eventuellen Alternativen gewichtet werden. Wie das getestete Programm im unterrichtlichen Kontext gewichtet wird, soll mit der Frage F7 geklärt werden. Schüler müssten aus meiner Sicht durchaus in der Lage sein, einen möglichen Zugewinn durch den Einsatz von Lernprogrammen gegenüber der üblichen Praxis abschätzen zu können, nachdem sie eines relativ intensiv kennen gelernt haben. Auch zu diesen Fragen standen den Probanden verschiedene Antwortmöglichkeiten zu Verfügung. Es handelte sich dabei zum einen um die Wahlmöglichkeiten Ja und Nein und zusätzlich noch um eine Auswahlmöglichkeit „weiß nicht“. In der dem folgenden Begriffsverband zugrunde gelegten Kontextmatrix wurde jeweils nur ein X

⁷¹ Wie zum Beispiel Nachhilfe oder Lernprogramme.

gesetzt, wenn der Proband die entsprechende Frage mit Ja beantwortete. Auch in Bezug auf die Interpretation der Schülerantworten im Bereich des zweiten Fragenblockes, ist entsprechende Vorsicht geboten. Um übersichtliche und somit interpretierbare Diagramme zu erhalten, wurden die Fragen des zweiten Fragenblockes nochmals unterteilt. Die jeweiligen Inhalte legen eine Zusammenfassung der Fragen F1-F3 und F4-F7 nah. Es ergaben sich folgende Begriffsverbände:

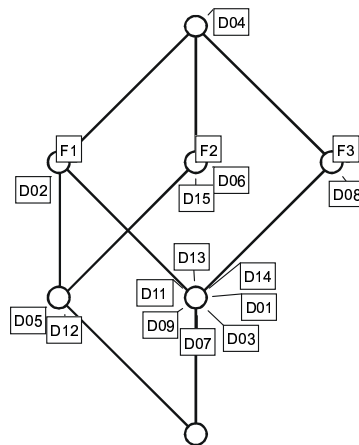


Abbildung 91, Begriffsverband Fragebogen Teil 2 Fragen F1-F3

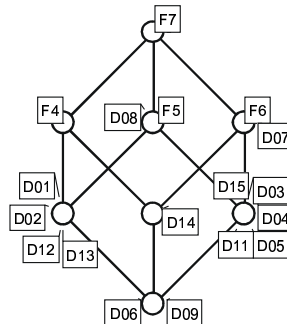


Abbildung 92, Begriffsverband Fragebogen Teil 2 Fragen F4-F7

Im ersten Begriffsverband fallen sieben Probanden auf, deren Beschriftungen jeweils einem Begriff zugeordnet wurden. Sie würden ein Programm einsetzen oder auf jeden Fall ein Programm möglichem Nachhilfeunterricht vorziehen, jedoch vorerst auch keine Nachhilfe in Anspruch nehmen. Die restlichen Probanden verteilen sich im Wesentlichen über die restlichen Begriffe, was bei ihnen auf Heterogenität in Bezug auf die Gewichtungen bei den Fragen F1 bis F3 weist. Hervorzuheben ist sicher noch Proband 4, der keinerlei positive Gewichtung in diesem Bereich vorgenommen hat. Das zweite Liniendiagramm bestätigt einige Ausführungen aus Abschnitt 3.3 in Bezug auf die familiäre Hilfe bei Hausaufgaben oder dem häuslichen Lernen. Alle Probanden bis auf 7 und 14 lernen mit Familienmitgliedern für Klassenarbeiten. Ansonsten fallen vordergründig noch zwei weitere Gruppierungen auf. Mit Freunden und Familienmitgliedern lernen und nicht unbedingt ein Lernprogramm diesem Lernen vorziehen würden die Probanden 1, 2, 12 und 13. Im Gegensatz dazu würden die Probanden 3, 4, 5 und 11 vom derzeit praktizierten Lernen mit Familienmitgliedern lieber zu einem entsprechenden

Programm übergehen. Interessant ist vor allem die Platzierung der Frage F7. Der Umfang des hier erzeugten Begriffes umfasst alle Gegenstände, in diesem Fall Probanden. Alle Probanden würden also nach der Arbeit mit dem Programm eine Integration desselben statt der üblichen unterrichtlichen Praxis wünschen.

Die hier und zuvor zusammengestellten Informationen kommen im nächsten Abschnitt dieser Arbeit zum Tragen und dienen ebenfalls der Feststellung und Vertiefung individueller Strukturen.

8.6 Zusammenfassung der erhobenen und ausgewerteten Daten

Dieser Abschnitt schließt die Kapitel zur Untersuchung ab. Zu Beginn sei nochmals an die in Kapitel 4 formulierten Leitfragen mit den entsprechenden Ausführungen erinnert:

Leitfrage I:

Kann ein Lernprogramm zur Bruchrechnung bei Schülern vorhandene Defizite beseitigen, beziehungsweise zu deren Beseitigung beitragen?

Leitfrage II:

Können Schüler in Einzelarbeit sinnvoll mit einem Programm zur Bruchrechnung arbeiten? Wo liegen die Probleme, wo die Perspektiven und wie sind diese im unterrichtlichen Kontext zu gewichten. Welche Aussagen lassen sich über den Umgang von Schülern mit einem Programm zur Bruchrechnung formulieren?

In einem ersten Schritt werden nun diese beiden Fragen separiert betrachtet und in Bezug auf die Ausführungen der letzten Abschnitte erläutert. In einem weiteren Schritt werden Zusammenhänge zwischen den beiden Fragen erörtert und abgewogen, inwiefern bestimmte Verhaltensweisen der Schüler zu entsprechenden Ergebnissen führten. Die Frage, ob der Einsatz im schulischen Kontext gerechtfertigt werden kann, bleibt dem nächsten Kapitel vorbehalten, da sie nicht ausschließlich durch Rückgriff auf die Ergebnisse der Untersuchung zu beantworten ist.

Die Auswahl der Probanden war so gestaltet, dass die Schüler vor der Konfrontation mit dem Programm spezielle Defizite aufwiesen. Es handelte sich dabei um systematische Schülerfehler, also Fehler, die von den Probanden konsequent bei der Bearbeitung von Aufgaben festgestellt wurden. Diese Fehler konnten nur noch sporadisch gefunden werden. Die Arbeit mit dem Programm führte also dazu, dass die Schüler ihre Strategie bei der Lösung von Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben änderten. Der Nachtest zeigte, dass bestimmte Aufgaben von den Schülern sicher gelöst werden konnten. Die Diskussion dieses Ergebnisses ergab, dass es sich dabei um Aufgaben handelte, deren Lösung primär ein bestimmtes Schema erforderte. Andere Fertigkeiten, wie z.B. der Umgang mit Klammern oder die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Brüche, spielten zwar auch eine Rolle, die Lösung der Aufgaben ohne die Kenntnis und Beherrschung der richtigen Additions- oder Subtraktionsalgorithmen war jedoch nicht möglich. Der Schluss, dass der Umgang der Schüler mit dem Programm zur Festigung und Verinnerlichung dieses Musters führte ist sicher nicht eindeutig, da sowohl soziale Aspekte als auch Verhaltensweisen außerhalb der Sitzungen nur wenig Beachtung fanden. Zumindest ist die bei den Schülerlösungen beobachtete hohe Homogenität im Bereich dieser Aufgaben ein starkes Indiz dafür, dass die Arbeit mit dem Programm, ungeachtet der individuellen Verhaltensweisen, die Fähigkeit, Brüche auf einer formalen Ebene addieren und subtrahieren zu können, schulte. Betrachten wir an dieser Stelle nochmals übliche

Lösungsquoten aus der Literatur. Padberg fand 1989 bei einer Untersuchung von Gymnasiasten, dass 88% der Schüler Aufgaben zur Addition erfolgreich bearbeiteten (vgl. [128], S. 16). Ähnliche Zahlen erhielten Herden und Pallack 1999 ([66], S. 269). Alle Autoren fanden, dass die Quoten im Bereich der Subtraktion geringer sind ([128], S. 16; [66], S. 264). Zech führt an, dass lediglich 50% von zugrunde liegenden Populationen Aufgaben des Typs natürliche Zahl plus Bruch adäquat bearbeiten können ([177], S. 163). Die beobachtete Probandengruppe übertrifft diese Sätze und kann unter Bezugnahme auf die zitierten Untersuchungen als überdurchschnittlich bezeichnet werden. Ein Unterschied im Schwierigkeitsgrad bei der Addition gleichnamiger oder ungleichnamiger Brüche, wie sie u.a. von Padberg beschrieben wird (vgl. [128], S. 88), trifft auf die Probandengruppe nicht zu. Trotzdem kann nicht davon gesprochen werden, dass die Probanden nur die Regel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ anwandten. Bei der Addition gleichnamiger Brüche wurde durchaus differenziert verfahren. Um Leitfrage I zu beantworten, soll der Begriff des Defizits nun noch etwas weiter gefasst werden. Der hohe Homogenitätsgrad bei der Bearbeitung von Aufgaben bestätigt sich bei den anderen Aufgaben der Sammlung nicht. Dass Regeln in unterschiedlichen Abstufungen formuliert und kognitiv fixiert werden, ist wohl allgemein bekannt. Wenn der Begriff des Defizits erweitert wird auf verschiedene Stufen der Anschauung und Abstraktion, so muss in Bezug auf die durchgeführte Untersuchung differenziert werden. So gibt es keine Indizien, die dafür sprechen, dass durch den Umgang mit dem Programm die Fähigkeit zur Regelformulierung oder der Umgang mit Brüchen auf ikonischer Ebene gefördert wurde, **obwohl diese Aspekte durch das Programm in den Sitzungen thematisiert wurden**. Was die Schüler schafften, ist eine hinreichend flexible Anwendung bestimmter Muster auf gegebene Zahlen. Dabei ist es durchaus möglich, dass einige Probanden ihre algorithmische Fähigkeit auf Anschauung oder Formulierungen begründen. In diesen Fällen korrespondieren verschiedene Aufgaben der Sammlung miteinander. Dies lässt sich jedoch nicht verallgemeinern. Auch über die Stabilität der Schülervorstellung lässt sich hier keine Aussage machen. Das Zurückfallen in alte Strategien ist nicht ausgeschlossen. So wandten sogar einige Probanden die althergebrachte Fehlerstrategie bereits sporadisch wieder an oder formulierten die Regeln zur Bruchrechnung in diesem Stil. Unter Berücksichtigung dieser Indizien halte ich folgende Formulierung zur Beantwortung von Leitfrage 1 für angemessen:

Es sprechen viele Indizien dafür, dass der Umgang mit dem Programm bei den Schülern die korrekte Strategie zur Addition von Brüchen förderte. Das Defizit, das bei der Auswahl der Schüler zugrunde gelegt wurde, konnte nur noch selten oder nicht beobachtet werden. **Der Umgang mit dem Lernprogramm beseitigte diese Defizite bzw. half sie zu beseitigen**. Andere Aspekte der Addition und Subtraktion von Brüchen wurden im Allgemeinen nicht stimuliert bzw. in gleicher Weise gefördert. Hierzu gehört der Umgang mit Bruchrepräsentanten und mathematischen oder verbalen Formulierungen.

Die zweite Leitfrage beinhaltet den Begriff „sinnvolles Arbeiten“, ohne ihn näher zu spezifizieren. Die Beschreibungen des letzten Abschnitts zeigten, dass die Verhaltensweisen durchaus variierten.

Was nun als sinnvolles oder sinnloses Arbeiten bezeichnet wird, ist natürlich relativ willkürlich. Auch Aktionen der Probanden die auf den ersten Blick nicht sinnvoll erscheinen, könnten eine Funktion im Rahmen der Übungen haben. Es gibt jedoch durchaus Ansätze, den Begriff des sinnvollen Lernens exakter zu fassen. Einen dieser Ansätze, wie er unter anderem bei Zech zu finden ist (vgl. [178], S. 127-146), soll hier Verwendung finden. Das sinnvolle Lernen und auch das sinnvolle Üben wird häufig mit dem Verstehen assoziiert. In seiner

Definition bezieht sich Zech auf die Lerntheorien von Gagné und auf Arbeiten von Ausubel. Unterschieden wird dabei zwischen mechanischem und sinnvollem Lernen (vgl. [178], S. 128). Während mechanisches Lernen in der kognitiven Struktur der Lernenden nur relativ isoliert verankert ist, baut sinnvolles Lernen auf vorhandene Strukturen auf und vernetzt neues Wissen mit bereits vorhandenem, was letztendlich nach Ausubel mit Behalten gleichzusetzen ist:

„Je sinnvoller etwas gelernt wird, d.h., je besser es auf die kognitive Struktur des Lernenden bezogen wird, desto besser wird es auch behalten.“

([178], S. 139)

Die Definition des sinnvollen Lernens beschränkt sich somit weitestgehend auf kognitive Behaltens- und Lernprozesse. In Bezug auf die Leitfrage kann nun sinnvolles Arbeiten analog definiert werden. Unter sinnvollem Arbeiten soll verstanden werden, dass Schüler versuchen, das Programm zur Reorganisation ihres Wissens zu nutzen. Der Bezug des Bruchrechnens zur durch den Unterricht geprägten kognitiven Struktur der Schüler besteht, da die Schüler die Addition und Subtraktion von Brüchen dort bereits kennen gelernt haben. Sinnvolles Arbeiten impliziert somit gezieltes Vorgehen. Analog lässt sich mechanisches Arbeiten fassen.

Es zeigte sich, dass einige Schüler eine außergewöhnliche Stringenz zeigten und das Programm streng linear mit möglichst wenig Fehlern abarbeiteten. Die Strategien dieser Schüler variierten. Einige rechneten laut, andere nutzten intensiv die Möglichkeit handschriftlich zu rechnen. Wieder andere versuchten, das Programm auszutricksen und mögliche Lücken im System zu finden. Dies ging sogar soweit, dass einige Probanden, obwohl sie wussten, dass sie beobachtet wurden, in Gesprächen bezüglich ihres Verhaltens logen. Durch die Untersuchungssituation wurden die Schüler angehalten, sich ausschließlich mit dem Programm zu beschäftigen. Dass dies im Heimbereich in ähnlicher Weise geschehen würde, kann nicht vorausgesetzt werden. Deswegen ist die Reichweite der Aussagen bezüglich der Probanden, die lange (z.T. mehr als zwei Stunden) vor dem Programm saßen, begrenzt und stark zu relativieren. Trotzdem schienen einige Schüler motiviert und nutzten das Programm gern. Das zeigten u.a. auch die Auswertung der Fragebögen oder die Gefühlsäußerungen von Schülern. Einige schienen den PC als Coach zu betrachten, dem sie Fragen stellen können und der ihre Übungen überprüft. Sie sprachen ihn an oder beschwerten sich bei ihm. Die Sitzungen einiger Schüler entsprachen relativ genau dem Bild des Practice&Drill-Programms. Viele vergebliche Versuche führten bei ihnen zu einer richtigen Lösung. Wie sich die Schüler anstellten, schien jedoch kein schlüssiger Indikator dafür zu sein, ob die Probanden die Lektion erfolgreich abschlossen. Da das Programm einen Teil seiner Attraktivität hierauf begründet (Schüler wollen schließlich alles abhaken), ist es zumindest fragwürdig, ob die Kriterien und Nutzungsmöglichkeiten des Programms sinnvoll implementiert wurden. Die Bedienungsfehler relativierten sich bei den meisten Probanden relativ schnell und schienen kein großes Problem darzustellen. Es sei jedoch nochmals daran erinnert, dass die Schüler eine Einführung erhielten. Ob ohne eine solche Einführung ähnliche Ergebnisse erzielbar gewesen wären, ist und bleibt unklar. Im Rahmen der Auswertung wurden solche Verhaltensweisen analysiert und versucht, die Verhaltensweisen der Schüler durch latente Variablen zu beschreiben. Im Rahmen der Analyse der Korrelationsmatrix von Bearbeitungswegen waren es zwei Dimensionen, die letztendlich das beobachtete informationsreduzierte Verhalten beschrieben. Eine Dimension erklärte die Linearität des Vorgehens. Die zweite beschreibt, ob der Proband eher Informationen vom Programm forderte oder eher entgegennahm. Dies sind ebenfalls nützliche Indizien dafür, ob der Umgang mit dem Programm in sinnvoller Weise erfolgte. Für mechanisches Lernen sprechen u.a. die extreme Sprunghaftigkeit, also nicht lineares Vorgehen oder auch, dass das Programm oft Informationen geben musste, um den Probanden durch das

Programm zu leiten. Da es sich um kodiertes Verhalten handelt, bedarf es jedoch genauerer Analysen des Probandenverhaltens, um abschätzen zu können, ob z.B. die Inanspruchnahme von Hilfen durch nicht zielgerichtetes Klicken zustande kam oder durch den Wunsch, vom Programm bestimmte Informationen zu erhalten. Viele solcher Analysen wurden in den vorhergehenden Abschnitten vorgenommen. Insgesamt halte ich aus diesem Grund folgende Formulierung für angemessen:

Die Beobachtung der Probanden ergab, dass sich ihr Umgang mit dem Programm recht unterschiedlich gestaltet. Während einige versuchten, Strategien zu entwickeln das Programm erfolgreich zu durchlaufen, schienen andere gezielt und intensiv an den Aufgaben zu arbeiten und Informationen des Programms aufmerksam zu verfolgen. Die Frage nach dem sinnvollen Umgang mit dem Programm lässt sich aus diesem Grund nicht pauschal beantworten. **Das Programm regte jedoch weder alle Probanden zum sinnvollen, noch alle Probanden zum mechanischen Arbeiten an. Es kann also nicht davon gesprochen werden, dass durch das Programm lediglich mechanisches Lernen unterstützt oder angeregt wird.** Es zeigt sich eine starke Abhängigkeit der Programmcharakteristik vom Nutzer. Der verfrühte Einsatz des Programms kann jedoch Schüler anregen, Spielregeln, die an sich sinnlos sind, zu entwickeln, um das Programm erfolgreich durchlaufen zu können. Es besteht aus diesem Grund die große Gefahr, dass der Einsatz des Programms zum Selbstzweck wird. Gezielt eingesetzt kann es die Funktion eines Werkzeugs bekommen, mit dem die Schüler alleine umgehen können.

Die Gefahr, welche ich dem Programm zuschreibe, ist somit nicht gering. Ein Gesamtüberblick dieser Folgerungen in Bezug auf den schulischen Einsatz wird im nächsten Kapitel vorgenommen.

Ich komme nun zur Untersuchung von Wechselwirkungen von Programmbedienung, sinnvollem Arbeiten (Leitfrage II) und der Beseitigung von Defiziten (Leitfrage I). Mehrfach diskutiert wurden die Probanden 4, 9 und 14, denen aufgrund verschiedener Strategien bei der Programmbedienung recht lineare Bearbeitungswege zugeordnet wurden. Die Probanden 4 und 9 waren darüber hinaus vergleichbar bei der Beantwortung der Aufgaben des Nachtests (siehe hierzu die Begriffsverbände in den entsprechenden Abschnitten). Alle drei Schüler beachteten die Einführungen des Programms hinreichend und klickten sich nicht schnell durch diese Programmabschnitte. **Trotzdem konnten die Probanden viele der Aufgaben aus Teil 2 der Aufgabensammlung nicht gemäß den Anforderungen beantworten.** Probanden, die viele Aufgaben aus beiden Blöcken richtig beantworteten (z.B. Proband 1, 2, 11 und 13), bei denen also durchaus davon gesprochen werden kann, dass Verständnis und eine gewisse Flexibilität vorhanden ist, fallen in den entsprechenden Analysen nicht besonders auf. Der sinnvolle Umgang mit dem Programm ließ in Bezug auf die Untersuchung keinen Rückschluss auf die sinnvolle Bearbeitung der Aufgabensammlung zu, also dahingehend, ob die Probanden auch Aufgaben aus den Teilbereichen II und I (siehe hierzu Abbildung 89) lösen konnten. Der Umgang selbst, egal ob sinnvoll oder mechanisch, förderte jedoch die Fähigkeit, Brüche richtig zu addieren. Folgendes Diagramm genügt aus diesen Gründen der zugrundegelegten Untersuchung:

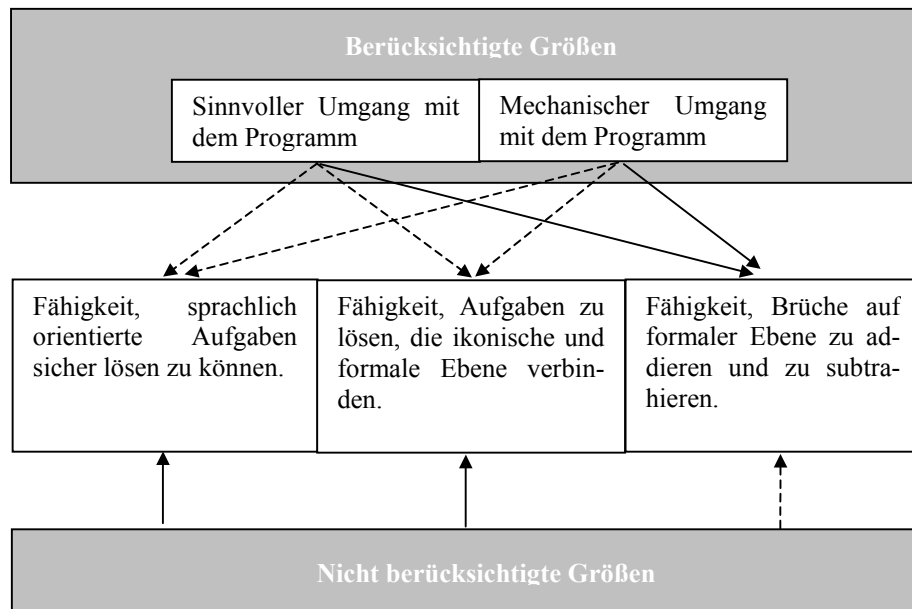


Abbildung 93, Zusammenhänge der Antworten der beiden Leitfragen

Gestrichelte Pfeile symbolisieren eventuelle Implikationen, die in Bezug auf die Probandengruppe jedoch eher unwahrscheinlich sind. Zu nicht gestrichelten Pfeilen führen die zuvor angeführten relativ starken Indizien. Zu den nicht berücksichtigten Größen gehört zum Beispiel die bei den Schülern vorhandene Bruchvorstellung, also unterrichtliche Faktoren, die von Kind zu Kind oder auch von Lehrer zu Lehrer variieren können. Auch unberücksichtigt blieben viele soziale Komponenten.

Die Ursachen für dieses Ergebnis der Untersuchung vermute ich im Wesentlichen in zwei Ursachen:

- Der Struktur des Programms.
- Dem schulischen Lehrgang zur Bruchrechnung.

So sind die Einführungen nicht interaktiv, d.h. der Schüler durchläuft sie durch schlichtes Weiterklicken. Die Aufgaben hingegen hatten meist den mechanischen Charakter, der sich letztendlich auch bei allen Probanden wiederfand. Eine mögliche Folgerung wäre, dass der Grad der Interaktivität darüber entscheidet, was letztendlich beim Probanden hängen bleibt⁷². Die zweite Ursache bedarf ebenfalls näherer Erläuterung. Die Schüler haben die Bruchrechnung im Rahmen schulischer Lehrgänge bereits behandelt. Es war somit nicht das Ziel, neues Wissen zu lehren, sondern lediglich, bereits vorhandenes Wissen zu reorganisieren und aufzufrischen. Ich gehe davon aus, dass die Einführungen, welche auch an die ikonische Ebene anlehnten und die Regeln der Addition und Subtraktion von Brüchen enthielten, für die meisten Schüler nicht unmittelbar einsichtig waren und aus diesem Grund nicht reorganisiert werden

⁷² Diese Annahme ist im allgemeinen Fall hoch spekulativ und bedürfte zum einen der Exaktifizierung des Begriffs der Interaktivität (siehe hierzu u.a. [17]), als auch deren Grad. Hier bezieht sich die Aussage lediglich auf das zugrunde gelegte Programm.

konnten. In Bezug auf den Additionsalgorithmus schien dies jedoch sehr wohl möglich. Ich vermute deswegen ebenfalls einen nicht zu vernachlässigenden Zusammenhang zur schulischen Vorbildung. Trotz des spekulativen Charakters dieser möglichen Gründe für die Ausprägung unterschiedlicher Fertigkeiten kann in Bezug auf die durchgeführte Untersuchung festgehalten werden, **dass sie irrelevant sind**, um Schülern die Anwendung eines richtigen Additions- bzw. Subtraktionsalgorithmus mit dem Programm Bruchrechnen beizubringen. Unabhängig von den unberücksichtigten Faktoren und unabhängig vom Umgang der Schüler mit dem Programm oder ihrem Erfolg bei dessen Abarbeitung, konnten alle Probanden Brüche auf formaler Ebene addieren und subtrahieren. Vergleicht man dieses Datum mit den Fähigkeiten, die Schüler vorher aufwiesen, **so kann durchaus von einer Steigerung des formalen Lernerfolgs gesprochen werden**, der sich wahrscheinlich auch im Rahmen schulischer Leistungsüberprüfungen einstellen würde. Inwiefern immer von einer Verbesserung gegenüber des Ist-Zustandes gesprochen werden kann, wird im nun folgenden Kapitel erörtert.

Klärung ausgewählter Aspekte der Rechtfertigungsproblematik

9 Klärung ausgewählter Aspekte der Rechtfertigungsproblematik

9.1 Konsequenzen der Untersuchung

Was ist geschehen? Ich leitete diese Arbeit mit einem Kapitel zum Lernen ein. Die Lerntheorien Behaviorismus, Kognitivismus und Konstruktivismus wurden erläutert und stehen nun als Werkzeug zur Analyse der Untersuchung zur Verfügung. Der Behaviorismus stützt die Perspektive, dass das Programm etwas mit dem Kind tat (vgl. [132], S. 177). Wenn das Modell ausreichen soll, den Lernprozess zu beschreiben, müssten bestimmte Verhaltensweisen zu bestimmten Ergebnissen führen. Es wurde gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, dass also aus der Beobachtung des Probanden beim Umgang mit dem Programm nicht auf bestimmte Fertigkeiten geschlossen werden kann. Beschränkt man sich auf Teilaspekte, reicht das Modell hingegen sehr wohl aus, um einige der Ergebnisse zu beschreiben. Alle Jugendlichen beherrschten nach dem Umgang mit dem Programm den Additions- bzw. Subtraktionsalgorithmus.

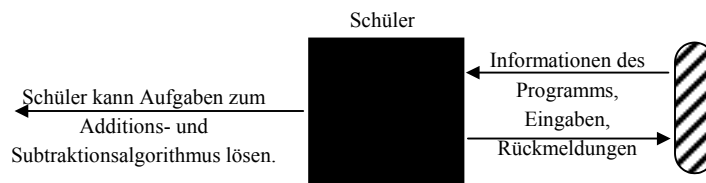


Abbildung 94, Behavioristische Sicht des Lernprozesses

Einzigste Voraussetzung war, dass es sich um Schüler der siebten Klasse handelt, also um Schüler, die das Bruchrechnen bereits im schulischen Rahmen behandelt haben. Diese Sichtweise ist zu eingeschränkt, wenn man die Vielfalt an Schülermeinungen oder Schülerlösungen betrachtet. Was bewegt z.B. einen Schüler dazu, den gleichen alten Fehler bei der Addition nur noch sporadisch bei einigen Aufgaben zu begehen? Was initiiert den Wechsel der Strategie oder wie stabil sind die Strategien eigentlich? Die durchgeführte Untersuchung erlaubt keine Aussage darüber, wie stabil die Fähigkeit, Brüche addieren oder subtrahieren zu können, ist. Ebenfalls ist es uns nicht möglich, eine Aussage über das Bild der Schüler von Brüchen zu ermitteln. Ebenfalls unklar ist, wie Schüler den Algorithmus kognitiv fixierten. So schafften es einige sowohl auf ikonischer, als auch auf sprachlicher Ebene mit dem Algorithmus umzugehen, andere wiederum nicht. Lediglich der gegebene Input kann nicht zu diesem Ergebnis geführt haben.

Der Kognitivismus nimmt an, dass der Lernende Informationen intern verarbeitet und das für das verarbeitende System Modelle gefunden werden können. Ich könnte mir dabei Modelle vorstellen, bei denen wirklich der Algorithmus im Vordergrund steht, das System Hirn also nach einem bestimmten Schema verarbeitet: „Nimm die Zahl, die im ersten Bruch unten steht mal mit der Zahl die im zweiten Bruch unten steht und schreibe sie unten in einen neuen Bruch, nimm dann die Zahl oben im ersten Bruch mal mit der Zahl unten im zweiten Bruch und addiere anschließend die Zahl unten im ersten Bruch mit der Zahl oben im zweiten Bruch und schreibe sie oben in den neuen Bruch.“ oder „Mache die Brüche gleichnamig und addiere sie dann wie gleichnamige Brüche.“ oder auch „Repräsentiere den ersten Bruch, repräsentiere dann den zweiten Bruch, füge die Repräsentanten zusammen und benenne sie mit einem hierzu äquivalenten Bruch.“. Solche Strategien könnten dann auch erklären, dass einige Schüler auf sprachlicher Ebene Probleme hatten und andere nicht. Viele Probanden vergaßen

bei der Regelformulierung, Aussagen über den Nenner zu machen oder formulierten eine gänzlich falsche Regel. Zusätzlich muss beachtet werden, dass die Schüler nicht die Formel anwandten, da bei unterschiedlichen Brüchen durchaus gezielt nach dem kgV gesucht wurde. Dieses Indiz spricht jedoch dafür, dass die Probanden die vom Programm vorgeschlagene Vorgehensweise, nämlich zu schauen, ob zwei Brüche gleichnamig sind und dann nur die Zähler zu addieren und den Nenner beizubehalten oder wenn die Brüche nicht gleichnamig sind, sie vorher gleichnamig zu machen, übernahmen. Folgendes Modell erfasst die unterschiedlichen Ergebnisse recht gut, wobei die eigentliche Repräsentation des Wissens unklar bleibt:

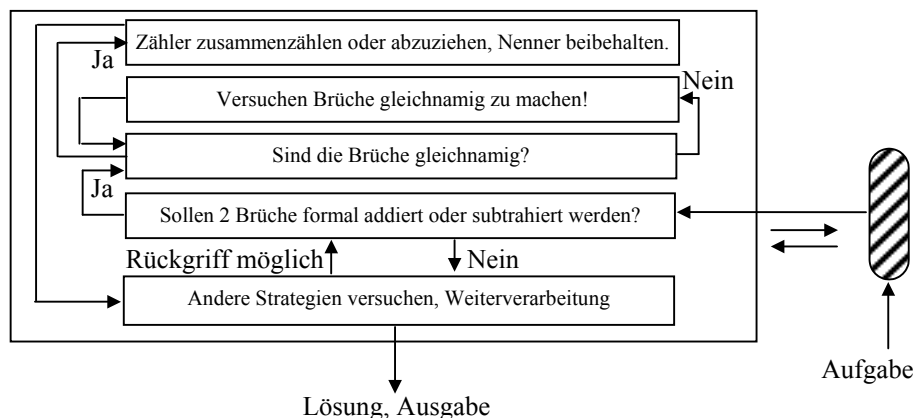


Abbildung 95,kognitionstheoretisches Modell zur Beschreibung des Schülerverhaltens

Wie die Schüler versuchen, Brüche gleichnamig zu machen oder Zahlen zusammenzuzählen und ob hierbei Fehler entstehen, bleibt offen. Blickt man nochmals auf den Test und die Schülerfehler zurück, so sieht man, dass das vorgeschlagene Modell die meisten Schüleraufzeichnungen erklären kann. Zum Beispiel beinhaltet es, dass Probanden bei gemischten Zahlen plötzlich andere Strategien anwandten oder Einbettungsfehler machten. Es erklärt ebenfalls, dass richtige Alternativlösungen, wie im Test bei der Multiple-Choice-Aufgabe vorgestellt wurden, nicht als solche akzeptiert wurden, da sie schließlich vom eigenen Muster abwichen. Auch das mathematische Texte nicht verstanden wurden, kann so beschrieben werden. Sicher müsste das Diagramm bei genauerer Betrachtung der Schülerlösungen (z.B. Aufgabe 1, Proband 1) noch etwas modifiziert werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sei auf die begrenzte Tragfähigkeit des vorgeschlagenen Modells lediglich hingewiesen. Welche Strategien nun dem Erweitern von Brüchen oder dem Zusammenzählen von Zahlen zugrunde liegen, bleibt unklar.

Betrachten wir abschließend die Fähigkeitsentwicklung der Schüler aus einer eher konstruktivistischen Perspektive. Das beobachtbare Verhalten der Kinder änderte sich durch den Umgang mit dem Programm. Über die eigentlichen Konstrukte wissen wir nichts. Wenn man jedoch davon ausgeht, dass Wissen nur aktiv konstruiert werden kann, wenn der Lernende dazu bereit ist, so kann gesagt werden, dass die Schüler durch das Programm motiviert wurden, ihre Fähigkeiten bzw. Wissensbasis zu rekonstruieren. Die eigentliche Art des Umgangs mit dem Programm, ob also die Schüler versuchten das Programm auszutricksen oder wirklich intensiv an den Aufgaben arbeiteten (sinnvolles / mechanisches Arbeiten), spielt für das beobachtbare Resultat scheinbar keine Rolle. Fraglich ist lediglich, ob das so entstandene Konstrukt zum einen hinreichend tragfähig, also viabel ist und zum anderen eine gut

Assimilationsbasis darstellt. Die begrenzte Tragfähigkeit zeigt das vorgestellte Modell. Die Assimilationsbasis, also das, was auf der gewonnenen Vorstellung aufgebaut werden kann, scheint ähnlich dürftig. Ein Blick in Schulbücher oder übliche Lehrgänge zur Bruchrechnung relativiert dieses Bild, da in ihnen auch häufig das Lösen von Rechenaufgaben im Vordergrund steht (vgl. Kapitel 2 dieser Arbeit). Des Weiteren stellte sich folgendes heraus:

- Der formale Lernerfolg wurde gesteigert.
- Die Schüler konnten angeleitet relativ schnell die Programmbedienung erlernen.
- Die Schüler würden lieber mit dem Programm üben, anstatt traditionelle Übungen zu lösen.

Es ist mir sehr wohl bewusst, dass die positive Einstellung der Schüler daraus resultieren kann, dass das Programm den Probanden vorher nicht bekannt und deshalb für sie neu war. Ich propagiere auch nicht den regelmäßigen oder dauerhaften Einsatz von Lernprogrammen. Trotzdem kann ihr gezielter Einsatz an einigen Stellen sinnvoll sein. **Jedoch müssen dem Einsatz von Lernprogrammen auch nicht zu verachtende Gefahren zugeschrieben werden:**

- Der Umgang mit dem Programm führte nicht dazu, dass Schüler flexibel auf verschiedenen Darstellungs- und Abstraktionsebenen Brüche addieren oder subtrahieren konnten. Wenn Schüler keine Vorstellung von Brüchen haben, Bruchrechnung in der Schule also noch nicht thematisiert wurde, halte ich es zwar für möglich, dass die Kinder die Regeln im Sinn von Spielregeln lernen, im Sinne eines adäquaten Lehrgangs zur Bruchrechnung muss ein solches Vorgehen jedoch als kontraproduktiv bezeichnet werden.
- Es ist unklar, ob Schüler die scheinbar nicht „intuitive“ Eingabe von Brüchen, gemischten Zahlen und Rechnungen in Programmen wie Bruchrechnen von sich aus bewältigen können. In der Untersuchung regulierten sich die meisten Fehleingaben, die Schüler erhielten jedoch auch eine Einführung und Hilfestellungen. Trotzdem ergaben neue Situationen und auch die Kombination von bereits bekannten Verfahren (vgl. die Ausführungen zu Fehlerquellen bei Aufgabe 5) erneute Probleme, die durch den Vergleich von Bearbeitungswegen aufgespürt werden konnten.
- Die begrenzte Diagnosefähigkeit der Programme lenken den Schüler nicht zu Aufgaben, die zur Behebung der Ursachen beitragen. Wenn ein Schüler einen Fehler im Bereich der Addition begeht (Die Vielzahl an Möglichkeiten wurde in Kapitel 2 erörtert), so wäre es doch sinnvoll, ihn auf Ebenen des Verständnis zu schulen. Dazu müssten Programme jedoch zwischen Rechen- und Verständnisfehlern unterscheiden können. Die auf dem Markt vorhandenen Programme müssen sich aus diesem Grund den Vorwurf gefallen lassen, den Schüler eher zu trainieren, als seine Defizite wirklich aufzuspüren und zu beseitigen. Dieses Training scheint einseitig und durch relativ einfache Modelle beschreibbar. Vollends durch behavioristische Ansätze lässt sich der Lernzuwachs trotzdem nicht befriedigend erklären. Wie Schüler das Wissen konstruierten, bleibt unklar. Bemerkenswert scheint, dass die anschaulichen Einführungen des Programms auf viele Schüler keinen Eindruck machten und im Nachtest keinerlei Wirkung zeigten. Schüler schienen diese Einführungen zwar zu betrachten, die Prägung der jeweiligen Konstrukte folgte jedoch nicht. Ob es festlegbare Kriterien gibt, nach denen man für Schüler attraktive von unattraktiven bzw. schlicht perturbationsunfähigen Programmelementen unterscheiden kann, war im

Rahmen dieser Untersuchung nicht zu klären, da die Schüler möglichst selbstständig mit dem Rechner umgehen sollten⁷³.

Die größte Gefahr scheint also, wie auch zuvor vermutet, im unreflektierten Einsatz solcher Programme zu liegen. Um jedoch nicht den Eindruck zu erwecken, dass mechanische Übungsvorgänge immer stumpfsinnig sind, strebe ich einen Vergleich an:

Wer schon mal in einem Konzertsaal saß, die Atmosphäre genoss und den einen oder anderen Musiker bewunderte, sollte sich doch mal die Frage stellen, wie eigentlich diese Fertigkeit gelernt wird. Nehmen wir als Beispiel den Pianisten. Im Prinzip scheint Klavierspielen recht einfach. Neben seinen zehn Fingern und den beiden Füßen stehen dem Pianisten 88 Tasten und ein bis drei Pedale zur Verfügung. Um Klavier spielen zu können, muss lediglich in der richtigen Reihenfolge das richtige Pedal getreten und die richtige Taste gedrückt werden. Durch sinnliche Rückkopplung lernt der Pianist, welche die richtige Taste ist und schult so seine psychomotorische Fähigkeit, die richtige Taste zur richtigen Zeit zu drücken. Das Üben bekommt Sinn, da der Pianist seinen Fortschritt erlebt und sein Methodenrepertoire ständig wächst. Um kreativ arbeiten zu können, braucht der Pianist Kenntnisse und Erfahrung. Kleine Übungsstücke nerven zwar den Lernenden aber jeder Pianist wird einen Notensatz im Schrank haben, vor dem er einen gewissen Respekt hat und der ihn antreibt, in kleinen Portionen zu erlernen, was notwendig ist um schließlich auch schwierigere Stücke zu spielen. Versucht man nun, das Klavierspielen zum Lernen der Bruchrechnung in Beziehung zu setzen, so fallen verschiedene Ungereimtheiten auf:

- Sie sitzen in einem Konzertsaal... Wie sollen Schüler eine Symphonie der Bruchrechnung erleben?
- Durch sinnliche Rückkopplung... An welchen Stellen erleben Schüler, die Bruchrechnung behandelt haben, ob ihre Fähigkeit einen Wohlklang erzeugt?
- ... hat einen Notensatz im Schrank ... Welches Ziel haben Schüler, die Bruchrechnung lernen vor Augen?

Schüler, die ein Programm zu Bruchrechnung verwandten, konnten die richtige Taste zur richtigen Zeit drücken, d.h. einige Aufgaben zur Bruchrechnung lösen. Beschränken wir uns wieder auf die Bruchrechnung. Lehrgängen zur Bruchrechnung liegt eine gewisse Systematik zugrunde. Im Rahmen dieser Systematik werden auch Phasen integriert, in denen die algorithmischen Fähigkeiten der Schüler geschult werden. **Es gibt mehrere Argumente, die in solchen Phasen für den Einsatz von Lernprogrammen sprechen:**

- Die Schüler bekommen eine Rückmeldung. Was vorher noch als Wohlklang bezeichnet wurde, führt in Bezug auf Bruchrechnung zu einer Sensibilisierung bezüglich eigener Fehler.
- Wird das Programm im unterrichtlichen Rahmen eingeführt, ist die Wahrscheinlichkeit sehr gering, dass Bedienungsprobleme auftauchen. In Abschnitt 3.3 wurde erläutert, dass Schüler einen Großteil ihrer Motivation aus dem Lösen von Standardaufgaben ziehen. Das im Programm Bruchrechnen angebotene Abhaken von Lektionen unterstützt diese Motivation und scheint den Schülern zu gefallen. So bieten sich bei einer Einführung im Rahmen des Unterrichts durchaus sinnvolle Integrationsmöglichkeiten in Übungseinheiten an.

⁷³ Ansonsten wären unmittelbar im Anschluss an die Programmbedienung Interviews zum Vorgehen des Schülers notwendig gewesen. Dies wäre jedoch erst nach Sichtung der Bänder möglich gewesen und hätte somit in keinem Bezug mehr zu den eigentlichen Sitzungen gestanden.

- Schüler können die algorithmische Fähigkeit, Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, relativ schnell rekonstruieren. Im Rahmen der schulischen Bruchrechnung werden diese Fähigkeiten von den Schülern gefordert. Da einige Schüler zu Hause Programme wie Bruchrechnen einsetzen, werden gleiche Voraussetzungen geschaffen und die Gefahr der unreflektierten Übernahme reduziert.

Computer Aided Instruction Programme, zu denen sicher auch Bruchrechnen zu zählen ist, haben eine lange Tradition. Ein bekannter Kritiker von Programmen dieser Art ist Papert. Die Autoren des Programms legten offensichtlich ein behavioristisches Lernmodell zugrunde. Gehen wir noch mal zurück zu den Praxistipps von Hubwieser aus Abschnitt 2.1. Es wurde versucht, eine angenehme Lernumgebung zu schaffen, den Schüler zu loben oder auch Bestrafungen nach Möglichkeit zu vermeiden (Obwohl die Schüler es manchmal als solche empfanden). Der nette Aufbau des Programms soll dafür sorgen, dass sich der Schüler wohlfühlt. Der schrittweise systematische Aufbau zeigt, dass die Autoren bemüht waren, Wissenshäppchen zu kreieren, die von den Schülern in irgendeiner Weise aufgenommen werden sollten. Das gelang nicht immer. So bissen sich Schüler lediglich an einigen Stellen des Programms fest, **die dann jedoch zur Prägung von Konstrukten führten**. Es ist den Autoren nicht gelungen, ihr Design so auszuwählen, dass die Probanden sämtliche dargebotenen Inhalte aufnehmen. Die vollständige Beschreibung des Probandenverhaltens durch behavioristische Theorien scheint nicht möglich. Vergleichen wir hierzu Papert mit einem Statement zum CAI. Er beobachtete einen Schüler, der ein CAI-Multiplikationsprogramm benutzte. Da der Schüler sich zu langweilen schien, entwickelte er eine Strategie mit Hilfe derer er vom Programm eine maximale Computeraktivität erhielt:

„Ein Vertreter für CAI könnte immer noch einwenden (...), dass dies nicht wichtig wäre, solange das Kind tatsächlich lernte. Meine Antwort darauf ist dieselbe, die ich für die meisten Lernprozesse durch mechanische Übungsmethoden mit oder ohne Computer bereit habe: Ja, Kinder können tatsächlich aus allem ein Spiel machen und dadurch lernen, wenn wir jedoch wollen, dass dies passiert, sollten wir es auch sagen und uns um Kontexte bemühen, in denen das Spielerische sich am besten entfalten kann.“

(vgl. [132], S. 179)

Ich stimme dem insofern zu, als dass die Kinder im Rahmen der Untersuchung tatsächlich nicht das Wissen vom Programm aufnahmen, sondern eigene Schwerpunkte die sich u.a. auch in individuellen Verhaltensweisen äußerten, entwickelten. Ich glaube jedoch, dass Papert mit seinem Beispiel aufzeigen will, dass die Wissensaneignung zufällig ist (Der Junge aus seinem Beispiel übte ja gar nicht das Multiplizieren). Dem muss widersprochen werden, da sich in Bezug auf die Untersuchung herausstellte, dass Schüler sich bestimmte Fähigkeiten aneigneten.

Ich komme nun abschließend auf die Kernfrage dieser Arbeit zurück:

Kernfrage:

Kann der unterrichtsbegleitende Einsatz des Programms Bruchrechnen⁷⁴ gerechtfertigt werden?

⁷⁴ Hier: Bruchrechnen Schritt für Schritt, Heureka Klett.

Der Einsatz scheint dann gerechtfertigt, wenn sowohl Lehrer als auch Schüler sich bewusst sind, dass der Umgang mit dem Programm sehr wohl algorithmische Fähigkeiten, andere Fähigkeiten jedoch nicht oder nur sehr beschränkt fördert. Der Einsatz muss bewusst erfolgen und darf nicht im Sinne eines Allheilmittels zum Erlernen der Bruchrechnung vorgenommen werden. Nicht außen vor bleiben darf die Verzahnung der gelernten Fähigkeiten im Unterrichtsprozess. So spielt beispielsweise die Kontextualisierung von Rechnungen eine nicht geringe Rolle. Dass Schüler es nicht gewohnt sind, mit mathematischen Texten umzugehen, zeigte nicht zuletzt der Nachtest. Im Sinne der Substitution traditioneller Übungseinheiten bekommen die Schüler ein Werkzeug an die Hand, das es ihnen ermöglicht, Vergessenes nachzuholen. Die Funktion des Computers als Nachhilfelehrer ist durchaus gegeben und dem formalen Lernerfolg wird genügt. Gegenüber dem Ist-Zustand, in dem Schüler solche Werkzeuge nicht zur Verfügung stehen, handelt es sich somit um einen Vorteil. Die Zufriedenheit von Schülern, Eltern und auch Lehrern in Bezug auf die Fähigkeit der Schüler Brüche addieren zu können, wird sich nach dem Umgang mit dem Programm wahrscheinlich einstellen.

9.2 Fazit

Die Integration des Rechners in den Unterricht scheint unumgänglich. Durch diese Arbeit wurde versucht herauszufinden, welche Wirkung ein Programm beim Schüler hat und welche Fähigkeiten geschult werden können. Blickt man nun noch mal zurück auf andere Möglichkeiten der Rechnerintegration (vgl. Abschnitt 3.4), so gibt es sicher attraktivere Ideen den Rechner sinnvoll in den Unterricht zu integrieren. Doch auch diese, bei weitem nicht so etablierten Methoden, müssen sich erneut einer Überprüfung aussetzen und sich im Rahmen der Praxis bewähren. Zentral ist, dass sie der Bereicherung dienen und nicht das leitende Element des Unterrichts darstellen. Sie sollen dem Schüler ermöglichen, das Bruchrechnen in vielfältigen Situationen, die manchmal auch spielerisch sein dürfen, zu erlernen, zu trainieren und letztendlich auch nachzuarbeiten. Der Lehrer in seiner Beratungsfunktion sollte die Gefahren des Rechnereinsatzes kennen und sowohl Schüler als auch Eltern hierauf hinweisen, um zu verhindern, dass lediglich Algorithmen das Bruchrechnen bestimmen. Dem entgegenzuwirken bleibt jedoch ein Ziel des realen und täglichen Unterrichts in unseren Schulen.

Beweise angeführter Sätze

10 Beweise angeführter Sätze

10.1 Beweis des Satzes zu Bestimmung von $s_{e,f}$

Zunächst sei vorausgesetzt, dass die Postulate **A1**, **A2.1**, **A2.3**, **A3.1**, **A3.2**, **A3.3** und **A4.2** erfüllt sind. Dann erfolgt der Beweis für die Gültigkeit der Gleichung

$$s_{e,f} = T \left(\sum_{k \in \{1, \dots, s\}, \max\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\} > 0} g_k \cdot \frac{\min\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\}}{\max\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\}} \right)$$

in zwei Teilen. Im ersten Teil wird ein beliebiges Tupel $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{N}^s$ betrachtet und mit Hilfe von Postulat **A3.3** gezeigt, dass die Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_s) = F\left(\sum_{k=1}^s x_k, 0, \dots, 0\right)$$

gilt. Dazu sei $t := |\{k \in \{1, \dots, s\} \mid x_k > 0\}|$. Der Beweis der Gültigkeit der gewünschten Gleichung erfolgt durch vollständige Induktion über t . In den Fällen $t=0$ und $t=1$ ist wegen der Permutationsunabhängigkeit von F nichts zu zeigen. Betrachte nun $1 \leq t \leq t+1 \leq s$: Sei $(y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{N}^s$ ein beliebiges Tupel mit $y_k > 0$ für höchstens t Komponenten. Wegen der Induktionsvoraussetzung darf angenommen werden, dass

$$F(y_1, \dots, y_s) = F\left(\sum_{k=1}^s y_k, 0, \dots, 0\right)$$

gilt. Diese Annahme wird mit (*) abgekürzt. Nun wird ein beliebiges Tupel $(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{N}^s$, für das $t+1$ Komponenten mit $x_k > 0$ existieren betrachtet. Wegen der Permutationsunabhängigkeit von F darf o.E. angenommen werden, dass $x_1 > 0, \dots, x_{t+1} > 0$ und $x_k = 0$ für $t+1 < k \leq s$ gilt. Mit Hilfe von Postulat **A3.3** wird wie folgt geschlossen:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0) &= F(0, x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0) \Rightarrow F(x_1 + x_{t+1}, \dots, x_t, 0, \dots, 0) = \\ &= F(x_{t+1}, x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0) = F(x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Wegen Annahme (*) gilt darüber hinaus:

$$F(x_1 + x_{t+1}, \dots, x_t, 0, \dots, 0) = F\left(\sum_{k=1}^{t+1} x_k, 0, \dots, 0\right),$$

woraus insgesamt die Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, 0, \dots, 0) = F\left(\sum_{k=1}^{t+1} x_k, 0, \dots, 0\right)$$

folgt und somit

$$F(x_1, \dots, x_s) = F\left(\sum_{k=1}^s x_k, 0, \dots, 0\right).$$

Damit ist der erste Teil des Beweises beendet. Mit Hilfe der strengen Monotoniebedingung für F (Bedingung **A3.2**) und Bedingung **A3.1** impliziert der erste Teil des Beweises die Existenz

einer streng monoton steigenden Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $T(0)$, so dass für alle Tupel $(x_1, \dots, x_s) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^s$ die Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_s) = T\left(\sum_{k=1}^s x_k\right)$$

erfüllt ist.

Für den zweiten Teil des Beweises seien nun zwei natürliche Zahlen $x \leq y$ und eine Zahl $k \in \{1, \dots, s\}$ beliebig gewählt. Dann gilt die Aussage

$$(*) \text{ Aus } 0 < y \text{ folgt } q_k(x, y) = q_k\left(\frac{x}{y}, 1\right).$$

Wegen **A2.1** gilt nämlich $q_k\left(\frac{x}{y}, 1\right) = q_k\left(y \cdot \frac{x}{y}, y \cdot 1\right) = q_k(x, y)$.

Unterstellen wir noch die Gleichung $x = 0$. Dann impliziert **A2.1** darüber hinaus für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Gleichungen

$$q_k\left(x, \frac{1}{n} \cdot y\right) = q_k\left(0, \frac{1}{n} \cdot y\right) = q_k(0, y).$$

Daraus folgt mit Hilfe von **A2.3**:

$$q_k(x, y) = q_k(0, y) = \lim_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} q_k\left(0, \frac{1}{n} y\right) = q_k\left(0, \lim_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} y\right) = q_k(0, 0).$$

Die Gleichung $q_k(0, y) = q_k(0, 0)$ sei im Folgenden mit **(**)** abgekürzt.

Jetzt betrachten wir zwei Familien $\{(x_k, y_k)\}_{1 \leq k \leq s}$, $\{(u_k, v_k)\}_{1 \leq k \leq s}$ von Paaren natürlicher Zahlen $x_k \leq y_k$ bzw. $u_k \leq v_k$. Seien $K \subset \{1, \dots, s\}$ bzw. $K' \subset \{1, \dots, s\}$ die Mengen derjenigen Zahlen y_k bzw. v_k , für die $y_k > 0$ bzw. $v_k > 0$ gilt. Wegen $F(0, \dots, 0) = 0$ ist die Existenz nichtnegativer reeller Zahlen g_1, \dots, g_s zu zeigen, so dass die Äquivalenz

$$\sum_{k \in K} g_k \cdot \frac{x_k}{y_k} < \sum_{k \in K} g_k \cdot \frac{u_k}{v_k} \\ \Leftrightarrow F(q_1(x_1, y_1), \dots, q_s(x_s, y_s)) < F(q_1(u_1, v_1), \dots, q_s(u_s, v_s))$$

gilt. Da für alle $k \in \{1, \dots, s\}$ aus $y_k = 0$ bzw. $v_k = 0$ auch $x_k = 0$ bzw. $u_k = 0$ folgt, kann wegen **(**)** o.E. angenommen werden, dass sowohl K als auch K' mit $\{1, \dots, s\}$ übereinstimmen. Seien die in **A4.2** postulierten nichtnegativen reellen Zahlen g_1, \dots, g_s gewählt. Wir beweisen die Implikation

$$\sum_{k \in K} g_k \cdot \frac{x_k}{y_k} < \sum_{k \in K} g_k \cdot \frac{u_k}{v_k} \Rightarrow F(q_1(x_1, y_1), \dots, q_s(x_s, y_s)) < F(q_1(u_1, v_1), \dots, q_s(u_s, v_s)).$$

Die umgekehrte Implikation folgt analog. Ihr Beweis kann daher der Kürze halber ausgelassen werden. Wegen des ersten Teil des Beweises ist die Ungleichung

$$\sum_{k \in K} g_k \cdot \frac{x_k}{y_k} < \sum_{k \in K} g_k \cdot \frac{u_k}{v_k}$$

zur Ungleichung

$$F\left(g_1 \cdot \frac{x_1}{y_1}, \dots, g_s \cdot \frac{x_s}{y_s}\right) < F\left(g_1 \cdot \frac{u_1}{v_1}, \dots, g_s \cdot \frac{u_s}{v_s}\right)$$

äquivalent. Um den zweiten Teil des Beweises zu beenden, genügt es, wegen (*), die Ungleichung

$$F\left(q_1\left(\frac{x_1}{y_1}, 1\right), \dots, q_s\left(\frac{x_s}{y_s}, 1\right)\right) < F\left(q_1\left(\frac{u_1}{v_1}, 1\right), \dots, q_s\left(\frac{u_s}{v_s}, 1\right)\right)$$

zu verifizieren. Dazu sei $n := \text{kgV}(y_1, \dots, y_s, v_1, \dots, v_s)$. Dann existieren natürliche Zahlen z_1, \dots, z_s und w_1, \dots, w_s , so dass für alle $k \in \{1, \dots, s\}$ die Gleichungen

$$(***) \quad \frac{x_k}{y_k} = \frac{z_k}{n} \quad \text{und} \quad \frac{u_k}{v_k} = \frac{w_k}{n}$$

gelten. Daher folgt:

$$\begin{aligned} F\left(g_1 \cdot \frac{x_1}{y_1}, \dots, g_s \cdot \frac{x_s}{y_s}\right) &= F\left(g_1 \cdot \frac{z_1}{n}, \dots, g_s \cdot \frac{z_s}{n}\right) = F\left(\sum_{k=1}^s g_k \cdot \frac{z_k}{n}, 0, \dots, 0\right) < \\ F\left(g_1 \cdot \frac{u_1}{v_1}, \dots, g_s \cdot \frac{u_s}{v_s}\right) &= F\left(g_1 \cdot \frac{w_1}{n}, \dots, g_s \cdot \frac{w_s}{n}\right) = F\left(\sum_{k=1}^s g_k \cdot \frac{w_k}{n}, 0, \dots, 0\right), \end{aligned}$$

woraus, wegen der strengen Monotonie von F die Ungleichung

$$F(g_1 \cdot z_1, \dots, g_s \cdot z_s) < F(g_1 \cdot w_1, \dots, g_s \cdot w_s)$$

folgt. Die Definition von n impliziert die Ungleichung $n \geq \max\{z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_s\}$, was erlaubt, Postulat **A4.2** anzuwenden. **A4.2** impliziert die Ungleichung

$$F(q_1(z_1, n), \dots, q_s(z_s, n)) < F(q_1(w_1, n), \dots, q_s(w_s, n)).$$

Wegen (***) folgt daraus die zu verifizierende Ungleichung

$$F\left(q_1\left(\frac{x_1}{y_1}, 1\right), \dots, q_s\left(\frac{x_s}{y_s}, 1\right)\right) < F\left(q_1\left(\frac{u_1}{v_1}, 1\right), \dots, q_s\left(\frac{u_s}{v_s}, 1\right)\right),$$

was den zweiten Teil des Beweises beschließt.

Um den Beweis des Satzes zu beenden, muss noch bewiesen werden, dass auch die Postulate **A1**, **A2.1**, **A2.2**, **A2.3**, **A3.1**, **A3.2**, **A3.3** und **A4.1** die Existenz nichtnegativer reeller Zahlen g_1, \dots, g_k und die Existenz einer streng monoton steigenden Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ implizieren, so dass die Gleichung

$$s_{e,f} = T\left(\sum_{k \in \{1, \dots, s\}, \max\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\} > 0} g_k \cdot \frac{\min\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\}}{\max\{h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_e), h(\mathbf{R}^k, \mathbf{K}_f)\}}\right)$$

gilt. Wegen der ersten beiden Teile des Beweises genügt es dazu zu zeigen, dass die Postulate **A2.2** und **A4.1** die Gültigkeit des Postulats **A4.2** nach sich ziehen. Dies ist aber unmittelbar klar. Tatsächlich ist lediglich $g_k := t_k$ für alle $k \in \{1, \dots, s\} \setminus \{h\}$ und $g_h = 1$ zu setzen. Damit ist auch der zweite Teil des Beweises beendet. ♦

10.2 Beweis des Satzes von Seite 98

Zu zeigen ist, dass die Bedingungen **S1** und **S2** die Existenz einer streng monoton steigenden Abbildung $T: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, mit $T(0) = 0$ implizieren, so dass für alle Tupel $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ die Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_U) = T\left(\sum_{i=1}^U x_i\right)$$

gilt. Sei ein Tupel $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ beliebig gegeben und $t := |\{k \in \{1, \dots, U\} \mid x_k > 0\}|$. Durch vollständige Induktion über t wird nun bewiesen, dass

$$F(x_1, \dots, x_U) = F\left(\sum_{k=1}^U x_k, 0, \dots, 0\right)$$

gilt. Wie im ersten Beweis folgt dann die gewünschte Behauptung: Der Fall $t=0$ ist trivial. Im Fall $t=1$ sei $x_k > 0$ für ein $k \in \{1, \dots, U\}$. Mit Bedingung **S2** folgt:

$$\begin{aligned} F(0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0) &= F(0, \dots, 0, 0 + x_k, 0, \dots, 0) = \\ &= F(0 + x_k, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0) = F(x_k, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

womit der Fall $t=1$ erledigt ist. Sei nun $1 \leq t < t+1 \leq U$: Es gelte $x_{k_1} > 0, \dots, x_{k_{t+1}} > 0$. O.B.d.A. kann $k_1 < k_2 < \dots < k_{t+1}$ vorausgesetzt werden. Mit Bedingung **S2** folgt:

$$F(\dots, x_{k_1}, \dots, x_{k_{t+1}}, \dots) = F(\dots, x_{k_1}, \dots, 0 + x_{k_{t+1}}, \dots) = F(\dots, x_{k_1} + x_{k_{t+1}}, \dots, 0, \dots),$$

wobei 0 an der k_{t+1} -Stelle steht. Die Induktionsvoraussetzung impliziert nun die geforderte Gleichung

$$F(\dots, x_{k_1}, \dots, x_{k_{t+1}}, \dots) = F\left(\sum_{i=1}^U x_i, 0, \dots, 0\right),$$

was noch zu zeigen war. ♦

10.3 Beweis des Äquivalenzsatzes von Seite 99

Die Beweise der bereits bewiesenen Sätze implizieren, dass Bedingung **S2** oder die Bedingung **S3⁺** und **S4** die Bedingung:

$$(*) \quad F(x_1, \dots, x_U) = F\left(\sum_{k=1}^U x_k, 0, \dots, 0\right)$$

für alle $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ ergeben. Darüber hinaus weist man wie in den vorhergehenden Sätzen durch vollständige Induktion sofort nach, dass auch die Bedingungen **S3**, **S4** und **S5** Bedingung $(*)$ implizieren. Der Vollständigkeit halber sei der entsprechende Induktionsschritt aufgeführt. Sei $1 \leq t < t+1 \leq U$: Wegen der Permutationsunabhängigkeit von F (Bedingung **S3**) darf $x_1 > 0, \dots, x_{t+1} > 0$ und $x_k \geq 0$ für alle $t+1 < k \leq U$ vorausgesetzt werden. Aus Bedingung **S5** folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$F(x_1, \dots, x_{t+1}, 0, \dots, 0) = F\left(\sum_{k=1; k \neq t+1}^U x_k, 0, \dots, x_{t+1}, 0, \dots, 0\right).$$

Wegen Bedingung **S3** folgt

$$F\left(\sum_{k=1; k \neq t+1}^U x_k, 0, \dots, 0\right) = F\left(0, \dots, 0, \sum_{k=1; k \neq t+1}^U x_k, 0, \dots, 0\right)$$

($\sum_{k=1; k \neq t+1}^U x_k$ steht an der $t+1$ -Stelle).

Daraus folgt wegen Bedingung **S5** die Gleichung

$$F\left(\sum_{k=1; k \neq t+1}^U x_k, 0, \dots, x_{t+1}, 0, \dots, 0\right) = F\left(0, \dots, 0, \sum_{k=1}^U x_k, 0, \dots, 0\right),$$

was mit Bedingung **S3** insgesamt die gewünschte Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_{t+1}, 0, \dots, 0) = F\left(\sum_{k=1}^{t+1} x_k, 0, \dots, 0\right)$$

nach sich zieht. Umgekehrt sieht man sofort, dass Bedingung (*) in Kombination mit **S4** sofort die Bedingung **S2** oder **S3**⁺ und **S4** oder **S3**, **S4** und **S5** impliziert. Da Bedingung **S4** durch jede der Bedingungen **S2** oder **S3**⁺ und **S4** oder **S3**, **S4** und **S5** impliziert wird, ist damit bereits die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii) und (iii) des Satzes bewiesen. ♦

10.4 Beweis des Charakterisierungssatzes von Seite 100 über die Gewichtungen

Sei $(x_1, \dots, x_U) \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^U$ ein beliebig gewähltes Tupel. Wie bereits bewiesen implizieren die Bedingungen **S1**, **S3**, **S4**, **S5** und **S6** oder **S1**, **S2** und **S6** die Gültigkeit der Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_U) = F\left(\sum_{k=1}^U x_k, 0, \dots, 0\right).$$

Daraus folgt mit Hilfe von Bedingung **S6** die Gleichheit von

$$F(g_1(x_1), \dots, g_U(x_U)) \text{ und } F\left(g_1\left(\sum_{k=1}^U x_k\right), g_2(0), \dots, g_U(0)\right) = F\left(g_1\left(\sum_{k=1}^U x_k\right), 0, \dots, 0\right).$$

Da $g_1 : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ streng monoton steigt und $g_1(0)=0$ gilt implizieren die Bedingungen **S1** und **S4** oder **S1** und **S2** die Existenz einer streng monoton steigenden Abbildung $T : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $T(0)=0$, so dass

$$F(g_1(x_1), \dots, g_U(x_U)) = T\left(\sum_{i=1}^U x_i\right)$$

gilt. Damit ist der Satz bewiesen. ♦

10.5 Kontextmatrix Eigenschaften Probanden

	E01	E02	E03	E04	E05	E06	E07	E08	E09	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E23	E24	E25	E26	E27	E28	E29
	Nutzt Tipp Optionen	Nutzt Hypertextoption	Nutzt Auswahlmenü	Nutzt Zeig-Option	Nutzt Hilfenü / Karteikasten	Nutzt Taschenrechner (>0)	Nutzt Taschenrechner (>5)	Nutzt Taschenrechner (>10)	Nutzt Taschenrechner (>15)	Nutzt Bildschirm befragen	ndert Lernwegempfehlungen	lickt sich z.T. schnell durch Einführungen	Rechnet auch handschriftlich	Rechnet laut	Zählt mit den Fingern	z.T. nicht mit Programm beschäftigt / unaufmerksam	spricht Rechner an / fragt o. antwortet Rechner	Liest Text von Bildschirm vor	Schülerfehler beim Kürzen	Typischer Additionsfehler	Rechenfehler in N / Falscheingabe Zahl	edlenungsfehler Eingabe gemischte Zahl	edlenungsfehler bei Eingabe Summen	edlenungsfehler Bruchstrich	sitzung erfolgreich beendet	earbeitungsdauer >30min	earbeitungsdauer >60min	earbeitungsdauer >90min	earbeitungsdauer >120min
D01	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D02	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D03	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D04				X		X	X					X	X				X	X	X				X	X	X	X	X	X	X
D05	X			X		X	X					X	X					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D06	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X							X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D07	X	X	X	X	X	X	X				X				X			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D08				X	X	X	X	X	X		X		X	X			X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
D09															X	X					X			X	X	X	X	X	X
D10	X			X							X	X	X					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D11	X	X		X	X						X	X	X					X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D12	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X					X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D13	X	X	X	X							X	X	X	X			X		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
D14	X	X	X	X							X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D15	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X		X	X	X					X	X	X	X	X

Literatur- und Quellenverzeichnis

11 Literatur- und Quellenverzeichnis

11.1 Genannte und verwandte Software:

ACCESS™ 97; Datenbank aus dem Microsoft Office Paket
Addy, spielerisch lernen, Mathe 5+6; Lernprogramm Coktel-Verlag
Alfons Lernwelten. Klasse 5+6; Lernprogramm Schrödel Verlag
Ali der Mathemaster; Lernprogramm Heureka Klett Verlag
Anaconda; System zur formalen Begriffsanalyse; Universität Darmstadt
Bruchrechnen Schritt für Schritt; Lernprogramm Heureka Klett Verlag
Cabri Gèométré; Geometrieprogramm Texas Instruments
Derive; Computer Algebra System
MS-Excel™ 2000; Tabellenkalkulation aus dem Microsoft Office Paket
Mathe Bits; Lernprogramm Westermann Multimedia, Braunschweig 1999
OKIDOKI-Bruchrechnen; Lernprogramm Schrödel Verlag
SPSS - Professionelles Statistik Paket SPSS 10.0, 8.0 und 6.0
Tim 7 und das Preisausschreiben in New York; Lernprogramm Heureka Klett Verlag
Toscana; Programm zur formalen Begriffsanalyse; Universität Darmstadt
TS-Uhr; Freeware
Visual-Basic™ 5; Programmierumgebung von Microsoft
VNC; Virtual Network Computing; AT&T
MS-Word™ 2000; Textverarbeitung aus dem Microsoft Office Paket

11.2 Literatur- und Quellenverzeichnis:

- [1] (2000); 8-Bit Computermuseum; <http://museum.ruhr.de>; Stand: 8.7.2000
- [2] (2000); Bezirksregierung Düsseldorf; <http://www.bezreg-duesseldorf.nrw.de>; Stand: 1.2.2000
- [3] (2000); Learn-Line Bildungsserver NRW; <http://www.learn-line.nrw.de>; Stand: 20.7.2000
- [4] (2000); Oscar Wyss - Lochkartensysteme; <http://home.balcab.ch/oscar.wyss/galerie.html>; Stand: 8.7.2000
- [5] (2000); Sodis Datenbank; <http://www.sodis.de>; Stand: 1.3.2000
- [6] (2000); Universität Hildesheim, FB Informatik; <http://www.uni-hildesheim.de>; Stand: 8.8.2001
- [7] (2001); Addy Lernsoftware; www.addy.de; Stand: 8.7.2001
- [8] (2001); Lernportal der Ernst-Klett-Verlags; www.klett-training.de; Stand: 15.6.2001

- [9] (2001); Studienkreis; www.studienkreis.de; Stand: 8.7.2001
- [10] Apflauer, R. und Reiter, A. (2001); Schule Online; Public Voice Report Verlag GmbH & CO KG.
- [11] Aspetsberger, K. (1998); Einsatz von computeralgebrafähigen Taschenrechnern für die Begriffsbildung; Beiträge zum Mathematikunterricht; S. 94-97.
- [12] Bacher, J. (1994); Clusteranalyse; Oldenbourg Verlag, München Wien.
- [13] Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W. und Weiber, R. (2000); Multivariate Analysemethoden; Springer.
- [14] Bähner, C. (1999); Computeranimiertes Lernen in der Informationsgesellschaft; Diplomarbeit Pädagogische Hochschule Freiburg.
- [15] Baloui, S. (1999); Jetzt lerne ich VBA mit Excel; Markt und Technik.
- [16] Baumann, R. (1998); Analysis I, Ein Arbeitsbuch mit Derive; Klett-Verlag.
- [17] Baumgartner, P. und Payr, S. (1994); Lernen mit Software; Österreichischer Studien-Verlag.
- [18] Becker, G. E. (1998); Unterricht auswerten und beurteilen; Beltz-Verlag.
- [19] Behr, M. (1990); Nachhilfeunterricht; Die deutsche Schule **82**; S. 81-94.
- [20] Bieber, G. (1997); Modernisierung in Zeitraffer - Wie in der Fortbildung Zugänge zu neuen Medien eröffnet werden; Pädagogik **3**; S. 28-30.
- [21] Bienert, T. und Padberg, F. (2000); Zur Entwicklung des Bruchzahlverständnisses und Rechenoperation mit gemeinen Brüchen innerhalb eines Schuljahres; Der Mathematikunterricht **2**; S. 24-37.
- [22] Blum, W. und Wiegand, B. (2000); Vertiefen und Vernetzen, Intelligentes Üben im Mathematikunterricht; Friedrich Jahresheft **XVIII**; S. 106-108.
- [23] Bock, H. H. (1974); Automatische Klassifikation; Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- [24] Borg, I. (1981); Anwendungsorientierte Multidimensionale Skalierung; Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

- [25] Brückner, A. (1994); Bruchware? Software zur Bruchrechnung; Mathematik Lehren **73**; S. 59-63.
- [26] Bruder, R. (2000); Elementares Können wachhalten; Friedrich Jahresheft **2000**; S. 102-104.
- [27] Buer, J. v. (1984); "Quantitative" oder "Qualitative" Unterrichtsbeobachtung? - Eine falsche Alternative; Unterrichtswissenschaft **3**; S. 252-267.
- [28] Burger, H. (2000); Bausteine zur Einführung der Computernutzung; Zeitschrift für Computernutzung an Schulen **39**; S. 48-49.
- [29] Bussmann, H. und Heymann, H.-W. (1987); Computer und Allgemeinbildung; Neue Sammlung **27**; S. 2-39.
- [30] Büttner, U. (2000); "Du hast (k)eine Chance, nutze sie!"; nds **06/07**.
- [31] Comenius, J. A. (2000); Große Didaktik; Klett-Cotta.
- [32] Cornelsen (2000); Multimediale Lernwelten - Lernen mit Spaß, Spiel und Action; Cornelsen.
- [33] Cöster, G., Griesel, H., Hermans, A., Jahner, H., Meißner, A., Müller, A., Strick, H. K. und Suhr, F. (1999); Elemente der Mathematik 11; Schroedel.
- [34] Cöster, G., Griesel, H., Hermans, A., Jahner, H., Meißner, A., Müller, A., Strick, H. K. und Suhr, F. (2000); Elemente der Mathematik 12/13; Schrödel Verlag, Hannover.
- [35] Daubert, K. und Gerster, H.-D. (1983); Differenzierende Maßnahmen zur Vorbeugung und zur Behebung von Schülerfehlern beim Rechnen mit Brüchen; Pädagogische Welt; S. 758-763.
- [36] Dzierza, P. P. und Haag, L. (1998); Hausaufgaben und Nachhilfeunterricht - Formen schulbegleitender Maßnahmen; Shaker Verlag, Aachen.
- [37] Eickhorst, A. (1994); Unterricht als Gegenstand empirischer Forschung; Peter Lang-Verlag.
- [38] Elschenbroich, H.-J. und Noll, G. (2000); Geometrie beweglich mit Cabri Géomètre II; Dümmler Verlag Köln.
- [39] Fahrmeir, L. und Hamerle, A. (1984); Multivariate statistische Verfahren; Walter de Gruyter.
- [40] Fickers, A. (1998); Der Transistor als technisches und kulturelles Phänomen; GNT-Verlag.
- [41] Finlayson, H. C., D. (1998); The Value of passive Software in Young Children's Collaborative Work; IT for Learning Enhancement; Monteith, M.; Swets&Zeitlinger; S. 106-120.

- [42] Freudenthal, H. (1970); Mathematik als pädagogische Aufgabe; Klett Studienbücher.
- [43] Fromm, M. (1990); Zur Verbindung quantitativer und qualitativer Methoden; Pädagogische Rundschau **44**; S. 469-481.
- [44] Funiok, R. (1993); Didaktische Leitideen zur Computerbildung; Profil Verlag GmbH München, Wien.
- [45] Ganter, B. und Wille, R. (1996); Formale Begriffsanalyse; Springer Verlag.
- [46] Gerster, H.-D. und Grevsmühl, U. (1983); Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen; Pädagogische Welt **November**; S. 654-660.
- [47] Glasersfeld, E. v. (1997); Radikaler Konstruktivismus; suhrkamp taschenbuch wissenschaft.
- [48] Glynn, J. (1995); Mathematik entdecken mit Derive - von der Algebra bis zur Differentialrechnung; Birkhäuser Verlag.
- [49] Graefe, G. (1990); Der Computer im Unterricht der Hauptschule; Ludwig Auer GmbH.
- [50] Graf, K. D. (1988); Computer in der Schule 2; Teubner Verlag Stuttgart.
- [51] Günzel, C. (2001); Hauslehrer auf Abruf; Focus **23**; S. 152-156.
- [52] Hahn, R. (1983); EUMEL, Extendable multi User Microprocessor ELAN-system; Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Zentrale Vervielfältigung der Universität Bielefeld.
- [53] Harde, O. und Anke, A. (1971); Programmierter Mathematikunterricht, Einführung in Verknüpfungsstrukturen - Potenzrechnung; Schroedel Verlag, KG Hannover.
- [54] Hart, K. (1981); Children`s Understanding of Mathematics; Athenaeum Press.
- [55] Hartung, J. und Elpelt, B. (1984); Multivariate Statistik; Oldenbourg Verlag, München, Wien.
- [56] Hasemann, K. (1985); Die Beschreibung von Schülerfehlern mit kognitionstheoretischen Modellen; **6/31**.
- [57] Hasemann, K. (1986); Mathematische Lernprozesse; Vieweg.
- [58] Hasemann, K. (1997); Ist die Bruchrechnung angesichts von Computeralgebrasystemen noch zeitgemäß?; Mathematik in der Schule **35**; S. 7-18.

- [59] Hasemann, K., Mangel, H.-P. und Marcus, A. (1997); Individuelle Denkprozesse - Ergebnisse einer Erprobung eines Bruchrechnenlehrgangs für das 6. Schuljahr; Osnabrücker Schriften zur Mathematik.
- [60] Heiligenhaus, A. d. I. (2000); "Jaaaaa-Buch"; Abiturzeitung; Heiligenhaus.
- [61] Heink, G. und Reitberger, W. (1990); Untersuchungen zum Verständnis des Bruchzahlbegriffs; franzbecker.
- [62] Henneke, M. (1997); Computergestützte Analyse von Schülerfehlern bei der Bruchrechnung; Beiträge zum Mathematikunterricht; S. 195-198.
- [63] Henneke, M. (1999); Online Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen; VDI Verlag.
- [64] Herden, G. (1986); Goodness-criteria and mean heterogeneity; Proc. of the 9th annual meeting of German Society for Classification; S. 201-208.
- [65] Herden, G. (1993); Some aspects of qualitative data analysis; Mathematikal Social Sciences **26**; S. 105-138.
- [66] Herden, G. und Pallack, A. (2000); Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung; Journal für Mathematikdidaktik **3/4**; S. 259-279.
- [67] Herden, G. und Pallack, A. (2001); Vergleich von rechnergestützten Programmen zur Bruchrechnung - Nachhilfelehrer Computer; Journal für Mathematikdidaktik **1**; S. 5-28.
- [68] Herden, G. und Pallack, A. (2001); Zur Verwendung explorativer Methoden der Datenanalyse in der interpretativen Unterrichtsforschung; in Vorbereitung, Universität Essen.
- [69] Herden, G. und Pallack, A. (2002); Consistency in ordinal data analysis I; in Vorbereitung.
- [70] Herden, G. und Pallack, A. (2002); Consistency in ordinal data analysis II; in Vorbereitung.
- [71] Herden, G. und Pallack, A. (2002); Consistency in ordinal data analysis III; in Vorbereitung
- [72] Heymann, H.-W. (1984); Modellierungsprobleme bei der Erforschung des Lehrer- und Schülerverhaltens; Unterrichtswissenschaft **3**; S. 232-251.
- [73] Heymann, H.-W. (1996); Allgemeinbildung und Mathematik; Beltz Pädagogik.

- [74] Hofe, R. v. (1998); Computergestützte Lernumgebungen im Analysisunterricht - Fallstudien und Analysen; Habilitationsschrift, Universität Augsburg.
- [75] Hofer, M. (1992); Die Familie mit Schulkindern; Familienbeziehungen; Hofer, M. und Noack, P.; Verlag für Psychologie; S. 171-193.
- [76] Hofmann, T. (1997); Interaktives Lernen mit dem Internet; Theoretische Grundlagen und praktische Entwicklung von internetbasierten Lernumgebungen; Diplomarbeit Georg-Simon-Ohm-Fachhochschule Nürnberg.
- [77] Höhle, D. und Schmidt, G. (1972); Computer im Mathematikunterricht; Schriftenreihe der Georg Michael Pfaff Gedächtnisstiftung.
- [78] Hole, V. (1998); Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer; Auer.
- [79] Hölzl, R. (1995); Eine empirische Untersuchung zum Schülerhandeln mit Cabri Géomètre; Journal für Mathematikdidaktik **16**; S. 79-112.
- [80] Hölzl, R. (2000); Dynamische Geometriesoftware als integraler Bestandteil des Lern- und Lehrarrangements; Journal für Mathematikdidaktik **2**; S. 79-100.
- [81] Hoppe, H. U. (1984); LOGO im Mathematikunterricht - Ein Beitrag zur Didaktik des interaktiven Programmierens mit zahlreichen Programmbeispielen; IWT-Verlag GmbH.
- [82] Horstmann, K., Meyer-Lerch, J., Stumpf, G. und Vernay, R. (1987); Handlungsorientierung im Mathematikunterricht; Mathematik Lehren **25**; S. 6-9.
- [83] Huber, P. (1998); Handreichung zum Einsatz des Computers in der Grundschule; Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München.
- [84] Hubwieser, P. (2000); Didaktik der Informatik; Springer.
- [85] Ingenkamp, K. (1997); Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik; Beltz Pädagogik, Weinheim Basel.
- [86] Jannak, W. und Koepsel, A. (1996); Einstiege in die Bruchrechnung; MUP **3**; S. 35-42.
- [87] Kähler, W.-M. (1998); SPSS für Windows; Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden.
- [88] Kayser, H.-J. (1994); Ein Auto, zwei Ziegen und die getäuschte Intuition; Praxis der Mathematik **6**.

- [89] Kayser, H.-J. (1995); Neue Medien im Mathematikunterricht - Derive mehr als nur ein Assistent; Landesinstitut für Schule und Weiterbildung.
- [90] Keidel, K. und Müller, H. J. (1983); Informatik - Einführung; Bayrischer Schulbuchverlag München.
- [91] Kerres, M. (1998); Multimediale und telemediale Lernumgebungen; Oldenburgverlag.
- [92] Kinney, C. und Zusho, A. (1999); From formal standards to everyday practice of mathematics learning. Illustrations from the TIMSS case study project in Japan; Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **31**; S. 175-190.
- [93] Klingen, L. H. und Liedtke, J. (1983); Programmieren mit Elan; Teubner.
- [94] Knoche, N. (1990); Modelle der empirischen Pädagogik; BI-Wissenschaftsverlag.
- [95] Köhler, R. (1998); Eine explorative Studie zu den fachdidaktischen, curricularen und informationstechnischen Implikationen des längerfristigen Einsatzes moderner mathematischer Standardsoftware in der Analysis; Dissertation Universität Kassel.
- [96] Krapp, A. (1984); Forschungsarbeit zur Bedingungsstruktur der Schulleistung, Leistungsdiagnostik in der Schule; Verlag Hans Huber.
- [97] Krapp, A. (1996); Die Bedeutung von Interesse und intrinsischer Motivation für den Erfolg und die Steuerung schulischen Lernens; Theorie und Praxis der Unterrichtsforschung; Schnaitmann, Gerhard W.; Auer Verlag Donauwörth; S. 87-110.
- [98] Kretschmann, R. (2000); Mut machen, Differenzierte Methoden für lernschwache Schüler; Friedrich Jahresheft **XVIII**; S. 74-77.
- [99] Kreutzkamp, T. und Wolpers, H. (1997); Bruchrechnung neu entdeckt von kommerziellen Anbietern; Beiträge zum Mathematikunterricht; S. 291-294.
- [100] Kreutzkamp, T. und Wolpers, H. (1997); Software für die Bruchrechnung; mathematica didacta **2**; S. 45-60.
- [101] Krippner, W. (1991); Mathematik differenziert unterrichten; Schrödel.
- [102] Kruskal, J. B. (1964); Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis; Psychometrika **29**; S. 1-27.
- [103] Kruskal, J. B. (1964); Nonmetric multidimensional scaling: a numerical method; Psychometrika **29**; S. 115-129.

- [104] Kuypers, W. und Lauter, J. (1982); Mathematik 6. Schuljahr; Pädagogischer Verlag Schwann-Bagel GmbH Düsseldorf.
- [105] Kuypers, W., Lauter, J. und Wuttke, H. (1993); Mathematik 6. Schuljahr; Cornelsen.
- [106] Landauer, T. (1997); Versagen im Mathematikunterricht - empirische Untersuchung unter leistungsschwachen Schülern; Wien; Universität Wien.
- [107] Leutner, D. (1999); Hypothesenprüfung versus interpretative Exploration: Die endlose Debatte zur Funktion quantitativer und qualitativer Analysen in der Lehr- Lernforschung; Unterrichtswissenschaft **4**; S. 323-333.
- [108] Lind, D. (1991); Modelle für Leistungsbewertungen; Mathematik Lehren **48**; S. 4-10.
- [109] Lörcher, G. A. (1982); Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen; Pädagogische Welt **3**; S: 172-180.
- [110] Maaß, J. (1997); Mathematik lernen mit Computern; Beiträge zum Mathematikunterricht; S. 339-342.
- [111] Maaß, J. (1999); Der Mathe-Tutor Geometrie - Multimediale Nachhilfe auf CD-Rom; Mathematik Lehren **92**; S. 46-47.
- [112] Maier, W. (1998); Grundkurs Medienpädagogik, Mediendidaktik; Beltz-Pädagogik.
- [113] Malle, G. (1993); Didaktische Probleme der elementaren Algebra; Vieweg-Verlag.
- [114] Mauve, R. und Moos, J. P. (1996); Mathematik mit Derive; Dümmers-Verlag.
- [115] Mehlhase, U. (1992); Wozu wird der Computer an allgemeinbildenden Schulen tatsächlich genutzt; Journal für Mathematikdidaktik **13**; S. 271-286.
- [116] Meister, D. und Sander, U. (1999); Multimedia - Chancen für die Schule; Luchterhand.
- [117] Meyer, H. (1987); Unterrichtsmethoden II; Cornelsen Scriptor.
- [118] Möller, A. (1998); Problemaufgaben in der Grundschule; Mathematik Lehren **90**; S. 9-12.
- [119] Moser, H. (2000); Abenteuer Internet, Lernen mit WebQuests; Auer Verlag Donauwörth.
- [120] Müller, P. (1999); Eigene Homepage erstellen; Data Becker.

- [121] Neumann, R. (1997); Probleme von Gesamtschülern bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs - Eine empirische Untersuchung; Verlag Heinz Jacobs.
- [122] Nordrhein-Westfalen, M. f. S. u. W. d. L. (1993); Richtlinien und Lehrpläne Mathematik Gymnasium Sekundarstufe I; Ritterbach Verlag mbH.
- [123] NRW, L. f. S. u. W. (2000)... und sie lernen doch; forum schule - Lernen und Lehren in der Diskussion **1**.
- [124] NRW, M. f. S. u. W. (1993); Richtlinien und Lehrpläne für das Gymnasium Sekundarstufe 1; NRW.
- [125] NRW, M. f. S. u. W. (1999); Richtlinien und Lehrpläne Sekundarstufe II Mathematik; Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW.
- [126] Oswald, H., Baker, D. P. und Stevenson, D. L. (1988); School charter and parental management in West Germany; Sociology of Education **51**; S. 255-265.
- [127] Padberg, F. (1992); Didaktik der Arithmetik; Bi-Wissenschaftsverlag.
- [128] Padberg, F. (1995); Didaktik der Bruchrechnung; Spektrum, Akademischer Verlag.
- [129] Padberg, F. (2000); Die Bruchrechnung ein Auslaufmodell?; Der Mathematikunterricht **46**; S. 5-23.
- [130] Pallack, A. (1998); Vergleich von rechnergestützten Lernprogrammen zur Bruchrechnung; Examensarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung; Universität Essen.
- [131] Pallack, A. (2001); Erprobung einer rechnergestützten Lernumgebung unter Berücksichtigung von Aspekten der Handlungsorientierung am Beispiel der Behandlung von Korrelation und Regression in der Jahrgangsstufe 11; 2. Staatsarbeit, Studienseminar Düsseldorf.
- [132] Papert, S. (1994); Revolution des Lernens; Heise Verlag Hannover.
- [133] Papert, S. (1998); Die vernetzte Familie; Kreuz Verlag, Stuttgart.
- [134] Pätzold, B. (1988); Familie und Schulanfang; Klinkhardt.
- [135] Payne, J. N. (1986); Über Schülerschwierigkeiten beim Bruchzahlbegriff, beim Erweitern, Kürzen und Ordnen von Brüchen; Der Mathematikunterricht **3**; S. 53-57.
- [136] Pfeifer, A. und Schmidt, P. (1987); Lisrel - Die Analyse komplexer Strukturgleichungsmodelle; Gustav Fischer Verlag, Stuttgart, New York.

- [137] Pförsich, P. (1994); Computer in der Schule - Lehren und Lernen mit interaktiven Medien; Medien praktisch **1**; S. 58.
- [138] Pohlmann, D. und Stoye, W. (2000); Mathematik plus, Gymnasien Nordrhein-Westfalen; Volk und Wissen Verlag.
- [139] Prediger, S. (2000); Mathematische Logik in der Wissensverarbeitung; Mathematische Semesterberichte **47/2**; S. 165-191.
- [140] Reichel, H.-C. (1995); Computereinsatz im Mathematikunterricht; Computereinsatz im Mathematikunterricht; Reichel, H.-C.; BI-Wissenschaftsverlag; S. 15-54.
- [141] Renkel, A. (2000); Automatisierung allein reicht nicht aus - Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive; Friedrich Jahresheft **2000**; S. 16-19.
- [142] Renkl, A. (1999); Jenseits von $p < .05$: Ein Plädoyer für Qualitatives; Unterrichtswissenschaft **4**; S. 310-322.
- [143] Renkl, A. (1999); Quantitative und qualitative Analysen in der Lehr- Lernforschung: Perspektiven und Integration; Unterrichtswissenschaft **4**; S. 290-291.
- [144] Ritter, M. (1994); Computer und handlungsorientierter Unterricht; Ludwig Auer GmbH.
- [145] Ritter, U. (2000); oral communication; Studienseminar Düsseldorf.
- [146] Rudert, K. (1999); Der Schatz des Thales; Zeitschrift für Computernutzung an Schulen **38**; S. 34-35.
- [147] Rudolph, M. (2000); Die Schule fordern, die Schüler fördern, kommerzielle Nachhilfeeinstitute als Herausforderung für die Schule; Friedrich Jahresheft **XVIII**; S. 34-36.
- [148] Saemmer, G. (1999); Paradigmen der Psychologie; Dissertation Halle.
- [149] Schanda, F. (1995); Computerlernprogramme - Wie damit gelernt wird. Wie sie entwickelt werden. Was sie im Unternehmen leisten.; Beltz.
- [150] Schlotfeldt, T. (1997); Lernsoftware für außerschulische pädagogische Handlungsfelder: Analysen und Bewertung; Diplomarbeit Universität Gesamthochschule Siegen.
- [151] Schmid, O. (1997); Diskussion der Funktionenschar $f_n: x \rightarrow x/(1+x^n)$, $n \in \mathbb{N}$; Praxis der Mathematik **6**; S. 263-267.

- [152] Schnabel, K. (1999); Wissenschaft ist Abstraktion, aber Abstraktes ist zu nix zu gebrauchen; Unterrichtswissenschaft **4**; S. 333-336.
- [153] Schnaitmann, G. W. (1996); Diskussion methodischer Ansätze in der Unterrichtsforschung; Theorie und Praxis der Unterrichtsforschung; Schnaitmann, Gerhard W.; Auer Verlag, Donauwörth; S. 17-40.
- [154] Schneider, E. (1998); Verhilft der TI-92 "alten" didaktischen Anliegen zum Durchbruch?; Beiträge zum Mathematikunterricht; S. 545-548.
- [155] Schulmeister, R. (1997); Grundlagen hypermedialer Lernsysteme; Oldenburg.
- [156] Schulz-Zander, R. (1997); Lernen in der Informationsgesellschaft; Pädagogik **3**; S. 8-12.
- [157] Schwarz, E. (1970); Experimentelle und quasiexperimentelle Anordnungen in der Unterrichtsforschung; Handbuch der Unterrichtsforschung, theoretische und methodologische Grundlagen; Beltz Verlag; Weinheim, Berlin, Basel; S. 448-631.
- [158] Schwirtz, W. (1994); Förderung geometrischer Begriffsbildung im Grundschulalter durch den Computer; Mathematische Unterrichtspraxis **IV**; S. 21-30.
- [159] Schwirtz, W. (1996); Vom zeichnerischen zum vorstellenden Operieren mit Computerunterstützung; Sache, Wort, Zahl **3**; S. 53-54.
- [160] Seeboerger-Weichselbaum, M. (1999); Java-Script; bhv-Verlag.
- [161] Steinberg, G. (1995); Sanft krümmt sich was ein Gleis werden will; Mathematik Lehren **69**; S. 61-69.
- [162] Stierlin, H. (1980); Eltern und Kinder; suhrkamp Verlag; Frankfurt am Main.
- [163] Strehl, R. (1972); Lernprogramme im Mathematikunterricht an Grund- und Hauptschulen; Beiträge zum Mathematikunterricht in den Klassen 1-6; Neunzig, W.; List Verlag.
- [164] Strobel, B. (1991); Software-Einsatz; Pädagogische Woche **5**.
- [165] Tappe, F., Schmiedl, F. und Viet, U. (1984); Entwicklung und Erprobung von Materialien für den Förderunterricht in Mathematik; Osnabrücker Schriften zur Mathematik **D**.
- [166] Tietze, U. P., Klika, M. und Wolpers, H. (2000); Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II; Vieweg.
- [167] Überla, K. (1970); Faktorenanalyse; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

- [168] Viet, U. (1982); Mathematikunterricht 5-10; U&S Pädagogik.
- [169] Ward, J. H. (1963); Hierarchical grouping to optimize an objective function; J. Amer. Stat. Assoc. **58**; S. 236-244.
- [170] WAZ (15.7.2000); Tagesausgabe.
- [171] Weigand, H.-G. (1997); Was können wir aus der Vergangenheit für den zukünftigen computerunterstützten Unterricht lernen?; Mathematik in der Schule **35**; S. 322-334.
- [172] Weigand, H.-G. (1999); Eine explorative Studie zum computergestützten Arbeiten mit Funktionen; Journal für Mathematikdidaktik **20**; S. 28-54.
- [173] Weigand, H.-G. (1999); Internet und Multimedia; Mathematik Lehren **92**; S. 4-9.
- [174] Wellenreuther, M. (1996); Stützweiler Mathematik, Bruchrechnung 2; Cornelsen.
- [175] Winter, H. (1984); Bruchrechnen am Streifenmuster; Mathematik Lehren **2**; S. 24-28.
- [176] Wittmann, E. C. (1981); Grundfragen des Mathematikunterrichts; Vieweg.
- [177] Zech, F. (1995); Mathematik erklären und verstehen; Cornelsen.
- [178] Zech, F. (1998); Grundkurs Mathematikdidaktik; Beltz.